趣味数学精品译丛

这本畅销的科普精品令人爱不释手

数学走遍天涯

发现数学无处不在

帕帕斯选择的话题，
总是能激发读者的想像，
并使读者对我们的数学世界如此宏伟感到惊奇.
——C. A. 皮科佛



[美] 赛奥妮·帕帕斯 著
蒋 声 译



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATION PUBLISHING HOUSE



责任编辑　王耀东　赵海燕
封面设计　一步设计

数学走遍天涯

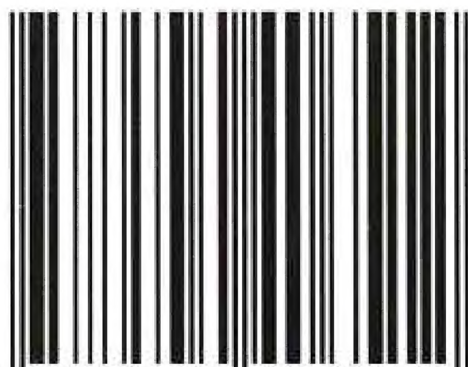
帕帕斯的书已经成为数学娱乐的金山……传播灵感与数学勇气.

——杰·赛斯卡，《数学折磨》的作者

帕帕斯选择的话题，总是能激发读者的想像，并使读者对我们的数学世界如此宏伟感到惊奇.

——C. A. 皮科佛，《计算机与想像》的作者

- 富有创意地考虑数学从古至今已经发挥的作用以及他在未来将会发挥的作用.
- 在灯火阑珊处揭示数学.
- 帕帕斯介绍数学观念的方式令人爱不释手.


ISBN 7-5444-0651-2
9 787544 406512 >
易文网：www.ewen.cc
定　价：15.00 元

趣味数学精品译丛

这本畅销的科普精品令人爱不释手

数学走遍天涯——发现数学无处不在

[美] 赛奥妮·帕帕斯 著
蒋声 译



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

Theoni Pappas

Mathematical Footprints

Discovering mathematics everywhere

图书在版编目（CIP）数据

数学走遍天涯：发现数学无处不在 /（美）帕帕斯（Pappas, T.）著；蒋声译. —上海：上海教育出版社，2006.7

（趣味数学精品译丛）

ISBN 7-5444-0651-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①帕…②蒋… Ⅲ. 数学—普及读物 Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第076232号

趣味数学精品译丛

数学走遍天涯

发现数学无处不在

[美]T.帕帕斯 著

蒋 声 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号 邮编：200031）

各地新华书店经销 上海新华印刷有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 6.75 插页 1

2006年7月第1版 2006年7月第1次印刷

印数 1－6,000本

ISBN 7-5444-0651-2/O·0011 定价：（软精）15.00元

（如发生质量问题，读者可向工厂调换）

万物对我皆为数学.

——R. 笛卡儿[René Descartes，法国哲学家、数学家，1596—1650 年]

引　言

当我们环顾四周，偶尔可见数学风采的微妙印记. 有些印记是新近刚添的，还有些是昔日留存的. 追寻和发现数学脚步的痕迹，令人神往，受益甚多. 这些印迹让我们感受数学对生活的巨大影响，从而帮助我们了解我们的世界和宇宙.

首批数学足迹的年代，回溯到史前时期. 保留在岩洞石壁上的标记或符号，记载了当时的一些事情——也许是时间的推移，或者是收集或交换物品的数量.

几千年来，数学展现了它对艺术、商贸、建筑、科学等等的影响. 在我们的日常生活中，数学是这样的微妙、普及和必需，以至我们经常忘记它的存在. 然而，日复一日，数学不断扩张它的领土，在越来越多的方面烙上它的印记. 今天如果离开数学工具，科学就无法启动，不论是银行、建筑、旅游、娱乐、电子业、发明或探索宇宙，都将一事无成.

《数学走遍天涯》跟着数学的脚印走. 在本书中，这些数学足迹的出场顺序是随机的，正如平常它们总是意外露面. 例如，勾股定理在无意间揭示了正方形的对角线长是无理数. 斐波那契(Fibonacci)和他以后的数学家们也未曾想到，斐波那契数竟会在自然界中如此流行. 又如，谁能预料，分形在刻画日常事物中变得这样重要? 历史一遍又一遍地表明，数学观念联系着现实世界，而我们却往往极少对此有所期待.

请你随便翻翻这本书，来发现数学的足迹. 或许你会和我一样，想要知道，是否最早的数学观念诞生在史前的洞穴里? 或者，数学观念是不是有待揭秘的永恒普遍真理?

译者的话

本书的英文书名是Mathematical Footprints，字面意思是“数学的足迹”. 足迹范围可大可小，本书范围如何？信手翻翻，书中内容涉及建筑、金融、美术、音乐、动物、植物、人体结构、天文、地理、分子、原子，如此等等，五花八门，琳琅满目，足迹遍布海角天涯. 因此，根据原书精神，结合中国读者欣赏习惯，将书名译为《数学走遍天涯》.

本书作者帕帕斯女士曾经写过《数学趣闻集锦》上、下册，已由上海教育出版社在1998年出版了中译本，由张远南和张昶两位先生翻译. 读过那两本书的朋友，或许已对书中丰富的内容、通俗的文字和有趣的插图留下美好印象，甚至可能还记得封面上那只美丽的彩色大海螺. 当时我曾为《数学趣闻集锦》写过一篇书评，题为《笑眯眯的数学》，刊登在《读书》杂志上，后来《文汇报》曾转载过.

如今这本《数学走遍天涯》，内容仍属“笑眯眯的数学”. 当然，书中不但有和颜悦色的数学，还包含各行各业有关知识的通俗介绍. 英文趣味与中文趣味相通，但有差异，翻译过程中有时需要适当填补空缺. 这些填补空缺帮助理解的少量文字，写在方括号里，与作者的原文相区别(原文中的括号是圆括号或花括号). 在将插图中的说明文字译成中文时，力求保持图形原有风貌，只对个别图形作了必要的局部修饰. 希望帕帕斯的这本新书能给朋友们带来新的快乐.

本书篇幅虽然不大，内容却非常丰富，涉及很多方面专业知识. 译者才疏学浅，勉力为之，理解欠妥和疏漏谬误之处在所难免，恳切希望各有关方面专家和广大读者朋友热情指正.

蒋 声 2006年1月6日

a

n

c b a

目　　录

引言 …………………………………………………………… Ⅰ

译者的话 ……………………………………………………… Ⅱ

早期数学制品……………………………………………………… 1

家喻户晓的黄金比………………………………………………… 5

看见的不是可信的………………………………………………… 9

数学与你的钱 …………………………………………………… 13

数学是建筑的框架 ……………………………………………… 17

高维空间 ………………………………………………………… 19

数学与立体主义 ………………………………………………… 23

德方斯大拱门 …………………………………………………… 27

数学的潘多拉盒子 ……………………………………………… 30

数学与人的身体 ………………………………………………… 33

计算机将有量子跳跃? ………………………………………… 37

数学、毕尔巴鄂和盖里…………………………………………… 40

勾股定理 ………………………………………………………… 44

圆环、螺旋线与海豚……………………………………………… 48

莫奈的艺术 ……………………………………………………… 52

绳结怎样联结数学 ……………………………………………… 55

中国剩余定理 …………………………………………………… 59

孤立子 …………………………………………………………………… 64
天气预报的数学 ………………………………………………………… 68
数学与矶崎新的建筑 …………………………………………………… 72
模糊数 …………………………………………………………………… 77
数学和考尔德的艺术 …………………………………………………… 81
小波 ……………………………………………………………………… 86
经度问题 ………………………………………………………………… 89
折痕中的数学 …………………………………………………………… 96
数学与自然形态…………………………………………………………… 100
数学与金字塔建筑………………………………………………………… 104
细胞自动机………………………………………………………………… 107
数学与艺术宣言…………………………………………………………… 111
数学走出迷宫……………………………………………………………… 113
计量单位今昔……………………………………………………………… 117
分子计算机………………………………………………………………… 121
从数学看塞尚的画………………………………………………………… 124
我在哪里？ ……………………………………………………………… 127
文学中的数学……………………………………………………………… 131
治安与复杂性……………………………………………………………… 135
时间的数学面貌…………………………………………………………… 139
宇宙………………………………………………………………………… 143
数字帮助查错……………………………………………………………… 147
数学与罗宾的艺术………………………………………………………… 151
这是费马最后定理的最后吗？ ………………………………………… 155
数学与生活中的对策……………………………………………………… 159

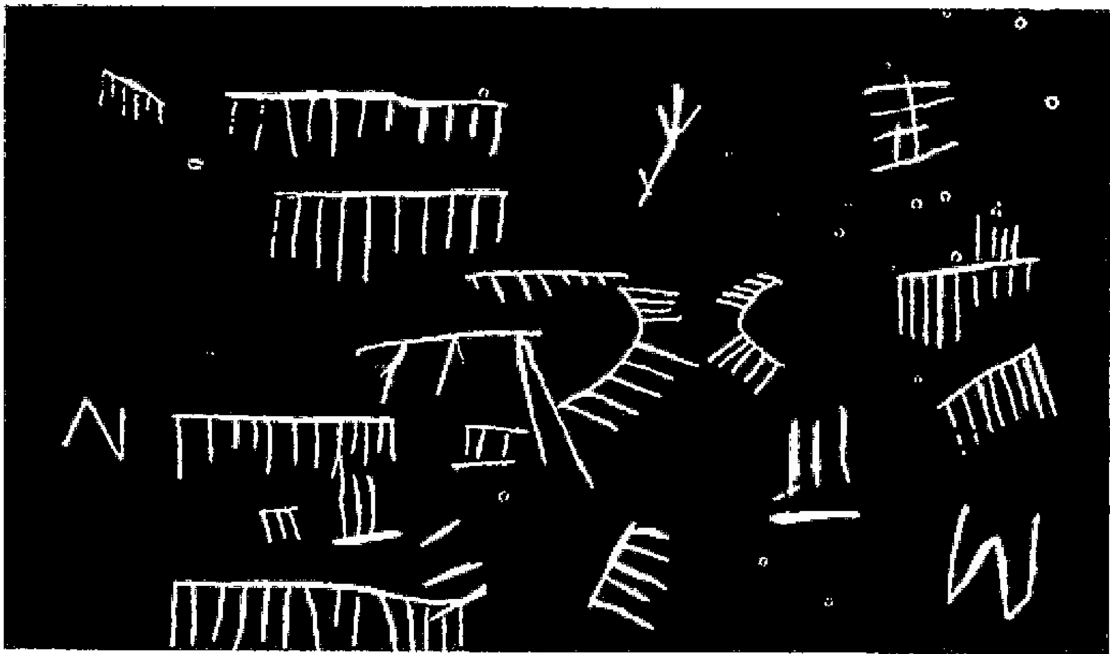
数学与旧金山现代美术馆的建筑……………………………… 162
音乐、物质和数学 ………………………………………………… 166
纳米技术………………………………………………………… 170
软计算…………………………………………………………… 176
晶体很清楚吗? ………………………………………………… 179
智能机…………………………………………………………… 184
附录……………………………………………………………… 187
参考资料………………………………………………………… 190
索引……………………………………………………………… 197

……利用十个符号表示一切数，其中每个符号代表一个数值，并被写在适当数位，这种巧妙的方法……现在我们觉得它是如此简单，因而忽视了它的真正价值. 但是，正由于它高度简单明了，……使我们的算术在有用发明中名列前茅. ……

——P. S. 拉普拉斯[P. S. Laplace，法国数学家、天文学家，1749—1827 年]

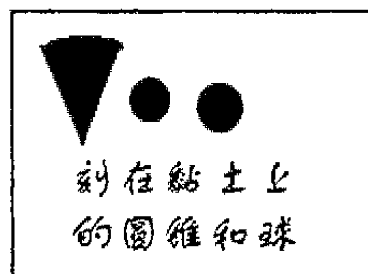
早期数学制品

在西班牙皮勒塔岩洞里，微弱光线照亮岩壁上刻着的记号. 人们惊奇地发觉，这些史前记号中，有些并非岩雕艺术或图画. 它们更像某种熟知事物——用来记数的一种符号. 这些岩洞居民记的什么账呢？这是史前数学的例子吗？只有我们的想象和直觉能提供可能答案. 最早的史前时代记数制品出自岩洞居民. [除去在岩壁上刻记外，]他们也利用石堆，或在地面做记号，或者在骨、石、棍上刻记号. 在骨刻上，多次出现五个记号结合成一组. 古人熟悉他们手上五指的位置，所以，能找到五个记号一组的筹码，并不奇怪.

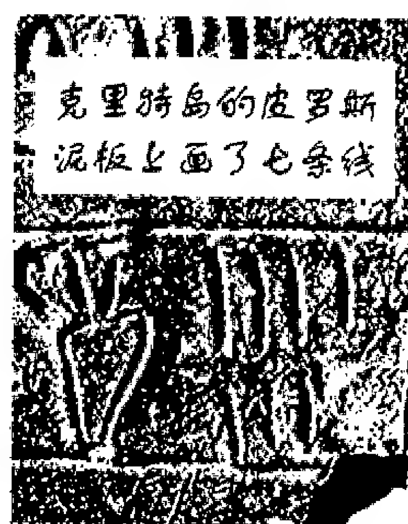


皮勒塔岩洞的记账符号

在苏美尔文明时期[约公元前4000年至公元前2000年]，关于数的演化，依稀可见，抽象的数或许已经形成.苏美尔人最先用黏土筹码表示商品.例如，谷物表示成圆锥或球，而圆柱形则表示动物.在农产品换购商品时，用到更复杂的新筹码[1]，形状为四面体或其他几何体，来记录衣服、面包、油瓶、金属工具等物品.他们把筹码放在哪里呢？农业筹码封存在一个刻有"签名"的黏土"封套"（球形黏土容器）里面[2].这些封套可以用来作收条，甚至契约.商品筹码在泥带上排成串，大约是便于复查.如果有人忘记泥封套里放了些什么，只好打碎封套看内容，免除可能引起的争议.后来，在泥封套外表刻上圆圈记号（表示球）或点状记号（表示圆锥），说明封套里的内容.于是逐渐形成符号的概念.例如，三棵树和两袋谷物，首先表示成三个圆锥筹码和两个球形筹码.然后在封套外面刻上表示这些筹码的记号——三个点状凹痕表示三个圆锥，两个圆痕表示两个球.对于其他筹码，也相继采用同样的记录方法.此后，苏美尔人用一个楔形表示1，用一个圆表示10.因而15写成●▼▼▼▼▼.又用一个大的楔形表示60，一个大圆表示360.他们的早期数系兼有十进制和六十进制.不过，直到公元前2400年左右，才有了数位系统.这种记数方法在中东广泛流行.

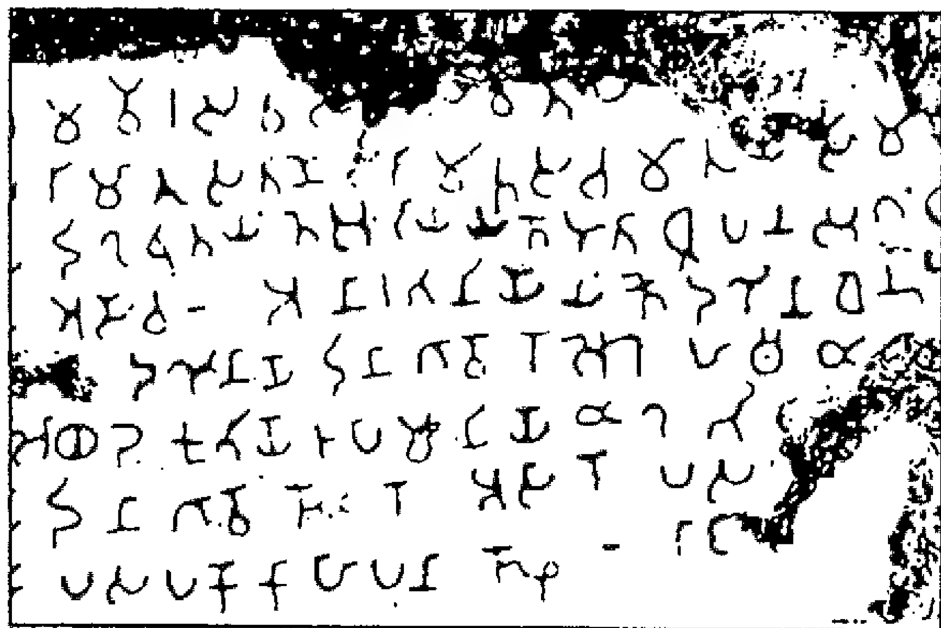

刻在黏土上的圆锥和球

古代数学制品遍布世界各地.在英国，发现了巨石阵（公元前2000年），可能是预测日、月事象的原始计算器.在[希腊]克里特岛挖出的泥板上刻着粗线条碑文，记载了诸如饲养动物、浴缸、青铜和黄金等事项.在印度那那加特岩洞，发现阿育王（公元前2世纪）的碑文，上面有公元前3世纪的早期印度数字.在印度的那西


克里特岛的皮罗斯泥板上画了七条线

[1] 陈列在法国巴黎卢浮宫.
[2] 每人有一个代表自己的签名.

克岩洞，找到 1 世纪和 2 世纪的数字. 兰德纸草卷和高洛尼雪夫纸草卷[又称莫斯科纸草卷]的发现，展现了古代埃及的数学工作. 这些纸草卷包含大量问题，在解答中运用整数和分数. 问题的解法涉及基本运算、一次方程、表格，还有一些几何应用题，内容包括圆、长方形、三角形和棱锥，以及测量和账目. 在中国长城的一处关隘，出土了一堆木杆，后来



那那加特岩洞发现的印度碑文片段

被叫做汉简. 这些杆来自汉代(约公元前 200 年至公元 200 年左右)，逐日记载生活在这段长城附近的中国人的活动. 这些木简记叙的事情里，有军队及其任务的情况，城砖的价钱，以及施工的距离. 这些杆上的数字书写方向自上而下，如同汉字的直排方式，并且对于20、30和40有

数字 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 100 200 1000

约公元前 250 年
阿育王的布拉美数字

约公元前 150 年
那那加特岩洞的数字

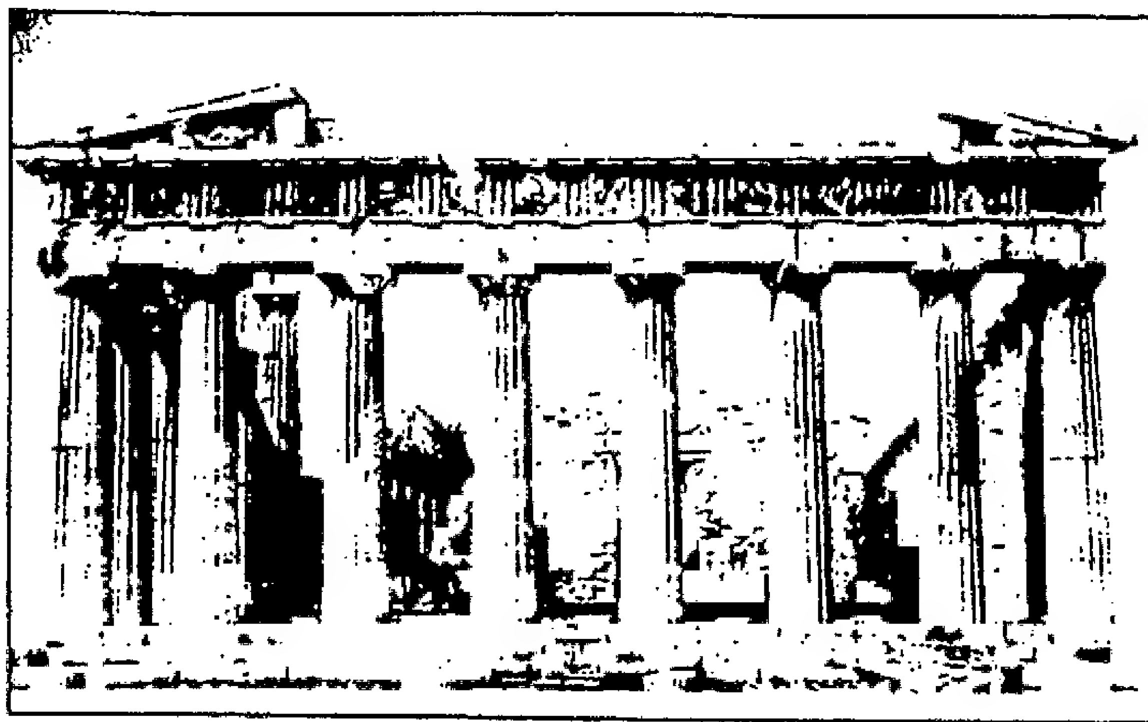
一种简便的写法. 以上这些制品表明,随着文化的功能更加复杂,需要有更成熟的数学去处理它的许多任务. 当然,对于这些数学制品,需要[联系其他有关情况]通盘考虑,因为毕竟它们不过是对往事的一瞥而已. 不妨设想,如果某人的所得税申报表被看成我们时代的一种数学制品,后人见了,将会怎样猜测我们的数学呢?

通过考察基本原理，我们看到，在数学中不存在最后终极，也没有最初开端.

——F. 克莱因[F. Klein，德国数学家，1849—1925 年]

家喻户晓的黄金比

在一条线段上的无穷多点中，有一个很特殊的点，具有一种神奇的量. 这个点将这线段分成一种数学比. 这种数学比非同寻常，它是数学里一连串奇妙互相联系的出发点. 它是这样特殊，因而被叫做黄金比[1]（又称为黄金平均值或黄金分割）. 最初它是在古代希腊发现的，当时被作为希腊人关于美观与平衡的一种美学指南. 看看古代希腊的建筑，你就会遇到黄金比. 看看古代希腊的雕塑，也经常有黄金比出现.

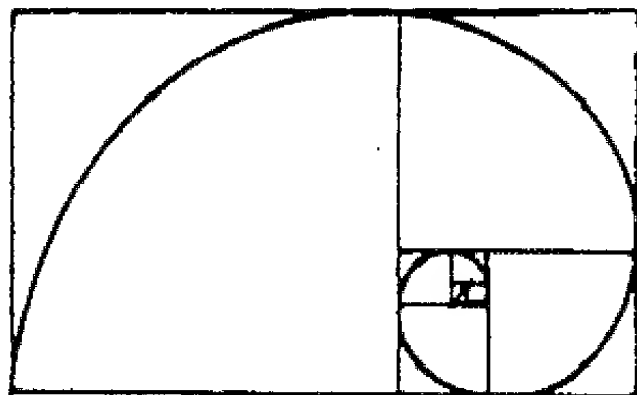


巴特农神庙的侧面边缘和底边构成黄金长方形

在一条线段上作出这个特殊点以后，可以拓展成一个黄金长方形[以这线段为一边，它被分成的较长线段为另一边]. 事实上，在一个黄

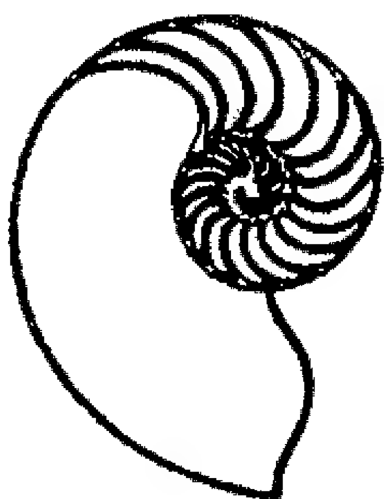
[1] 在书末附录中将说明怎样把一条线段分成黄金比.

金长方形内,能够产生无穷多个黄金长方形[从原来的黄金长方形割去以其短边为一边的正方形,就得到一个较小的黄金长方形,这种切割过程可以无限继续].



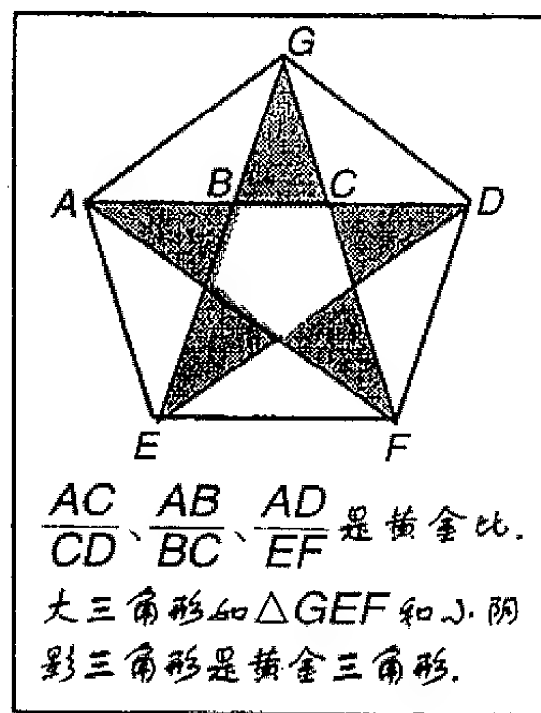
黄金长方形、它的等角螺线和形内无穷多较小的黄金长方形

在这个黄金长方形和相关的无穷多个[较小的]黄金长方形里面,隐居着一条美丽的曲线,叫做等角螺线,又称为生长螺线,因为可以在自然界中许多生物的形状里找到它.



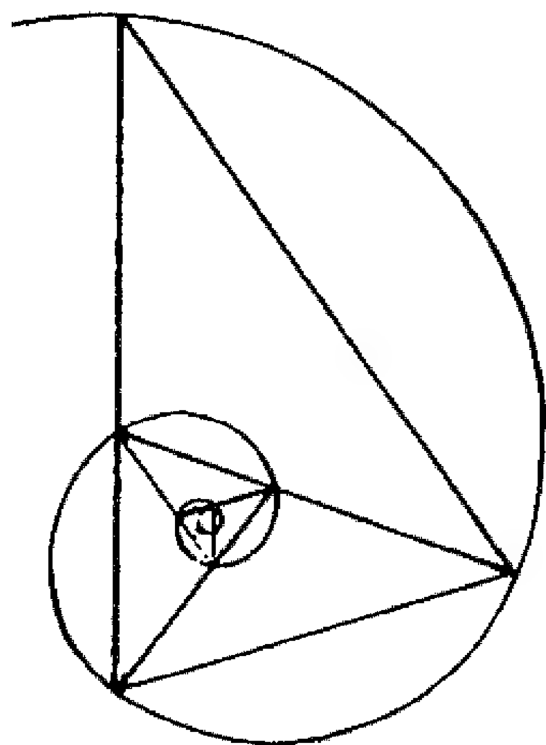
鹦鹉螺壳

不过,黄金比并非只限于黄金长方形. 作一个正五边形. 画出它的对角线,得到一个五角星. 组成五角星的这些对角线互相分割成黄金比. 或许这就是古人和[中世纪]炼金术士认为五角星具有魔力的原因.



$\frac{AC}{CD}$、$\frac{AB}{BC}$、$\frac{AD}{EF}$是黄金比.
大三角形如△GEF和小阴影三角形是黄金三角形.

现在观察五角星图形里面的(五个画阴影的)三角形. 其中每个三角形叫做一个……你猜猜看……黄金三角形. 它是一个等腰三角形,每个底角都是72°,顶角为36°. 平分它的一个底角,得到一个新的较小的黄金三角形. 平分底角的过程无限继续下去,类似于黄金长方形,从这个黄金三角形产生出无穷多个黄金三角形. 这些三角形里面也藏着一条等角螺线.



黄金三角形、它的等角螺线和形内无穷多较小的黄金三角形

由于在一条线段上寻找非常特殊的点而产生的数学成果，并未就此止步. 著名的斐波那契数列 1,1,2,3,5,8,13,21,…,也与黄金比有关.

黄金比的值是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339\cdots$,用希腊字母 Φ 表示. 观察斐波那契数列 1,1,2,3,5,8,13,21,…,分析其中的各个数,可知每个新

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=1.618\ldots$$

项都是前两项的和. 黄金比就躲在这里,在斐波那契数列邻项之比中,作一个新的数列,使其各项顺次等于斐波那契数列两个相邻项的比,即$\frac{F_n}{F_{n-1}}$[其中 F_n 和 F_{n-1}分别是斐波那契数列的第 n 项和第 $n-1$ 项,$n=2,3,4,\cdots$]. 我们得到$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\cdots$,这些比的小数值是

$$1,2,1.5,1.666\cdots,1.6,1.625,1.6153846,1.6190476,\cdots$$

在上列各数中,黄金比的不足近似值和过剩近似值交替出现. 事实上,J. 开普勒(Johann Kepler,1571—1630 年)已经发现,这些数[两面夹攻]挤出黄金比来.

说到这里,联系还没有结束. 观察数列 $\Phi,\Phi^2,\Phi^3,\Phi^4,\Phi^5,\cdots$,将 Φ 的值$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$代入后,展开,数列变成

$$\Phi,2\Phi+1,3\Phi+2,5\Phi+3,8\Phi+5,13\Phi+8,\cdots,$$

这时再次得到与 Φ 链接的斐波那契项.

在黄金比中,还隐藏了哪些几何性质呢?

• 如果一个正十边形内接于一个圆,那么圆半径与正十边形边长的比是黄金比.

• 如果一个正八面体的各条棱被分成黄金比[12 条棱上各有一个对应分点],那么这 12 个分点是一个正二十面体的顶点.

• 正二十面体的 12 个面的 12 个中心可以适当联结,成为三个两两垂直的黄金长方形.

• 正二十面体的顶点可以联结成三个两两垂直的黄金长方形.

• 黄金比还出现在彭罗斯瓷砖的形状里[以后将会看到这种"瓷砖"的图形].

通过在线段上求一点而发现的各种数学联系令人惊讶.继续考察下去,黄金比的足迹一定还会在其他地方出现.

大艺术家眼中所见事物决不是真实面貌. 一旦完全局限生活真实,他将不再是艺术家.

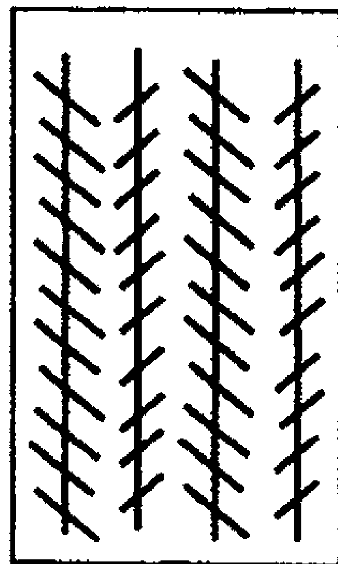
——O. 王尔德[Oscar Wilde,英国作家、评论家、美学家,1854—1900 年]

看见的不是可信的

——数学与视幻

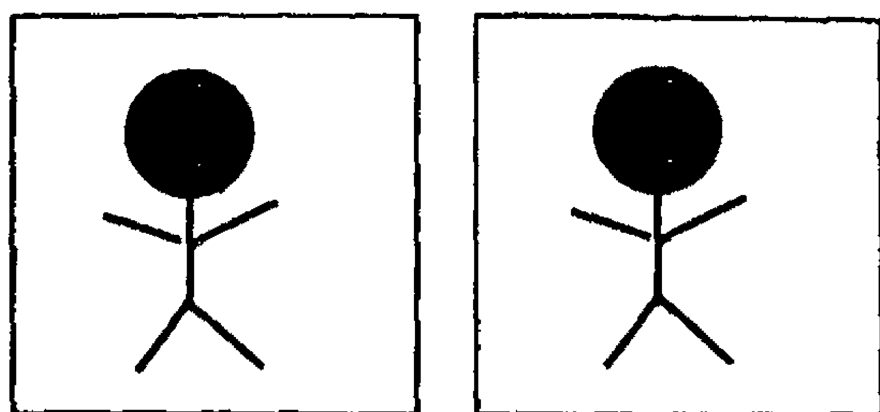
我们眼前的景象与我们的视觉感受之间,存在一定差别. 古人早已明白,视觉怎样扭曲真相. 事实上,[古代]希腊人在建筑物中,有意将柱子适当变形,使它们看起来像是直的. 当时的建筑师们知道,如果把建筑物真的造得很直,看上去却会认为不直,因为视网膜是弯曲的,影响我们观看物品. 由此带来的一个结果,是将巴特农神庙的柱子和神庙的长方形底面建造成稍许往外凸出一些.

在必须精确的场合,我们不能仅仅依赖于自己的眼睛,而应求助于测量——这是数学的最初功能之一. 但这并不是人们唯一知道的数学功能或影响. 15 世纪文艺复兴时代的艺术家们发现了,可将透视画法和射影几何观念应用到他们的作品,改进画面,增强真实感. 最先试画三维图形的,不是文艺复兴画家. 大约 15000 年以前,在拉斯考克斯岩洞里,一位岩洞居民尝试创新技巧,不在平坦墙面上绘画,而是在弯曲岩石上雕刻,试图营造三维气氛.


佐尔内的幻图

对光学幻觉的作用进行研究,是在 19 世纪兴起的. 那时,天体物理学家佐尔内(Johann Zollner,1834—1882 年)偶然发现,在一片布上有一种花样,使平行线看上去不平行. 自然,对于严重依赖观察的天文学,这样的发现至关重要. 结果,19 世纪许多科学家纷纷动手,运用符号、空间、图形、射影和负像,创作出各种引起幻觉的图画,并对这些视

幻图形进行研究、解释和分类，阐明我们的感觉怎样被幻象欺骗，而能看见某些其实并不存在的东西[1]. 在这段时期，出现了立体镜，可以从二维图形产生三维形象. 1838 年 C. 惠斯登(S. C. Wheatstone)发明了立体眼镜，在以后的年代里发明了立体画. 这两种发明各显其能. 19 世纪 80 年代中叶，立体镜在伦敦水晶宫博览会公开展示. 立体画依赖于我们双眼分别捕获的有微小透视差异的一对图像. 甚至画家 S. 达利(S. Dali)也被用立体镜创作的三维图画深深吸引，他在 20 世纪 60 年代至 70 年代画过一些用立体眼镜观看的作品. 如今可将过去的视幻图形看成无须借助电子计算机的虚拟现实.



凝视这两幅图，并且放松你的眼部肌肉. 结果将有一幅跑到另一幅内，于是两个正方形变成三个. 三个都在吗？

运用视觉科学，结合透视与维数的数学理论和几何学，视幻图形继续发展. 1979 年出现重大突破，心理生理学家 C. 泰勒(C. Tyler)和电脑程序设计师 M. 克拉克(M. Clarke)发表了第一幅[不需借助立体眼镜观看的]单图三维画. 稍后，发明了随机点三维画. 这种画由两幅略有差异的点状图(分别对于左眼或右眼)重叠而成，看上去是被一些随机分布的点覆盖着. 在 20 世纪 90 年代，出现"魔眼"广告画和"魔眼"书，使单图三维画的观念得到普及. 全国各大购物市场的商店，纷纷在橱窗

[1] 在他们当中，有生理学家、物理学家和数学家 H. L. 亥姆霍兹(H. L. Helmhotz, 1821—1894 年)，物理学家和心理学家 E. 赫林(E. Hering, 1834—1918 年)，医生 J. 缪勒(J. Muller, 1801—1858 年)，地质学家、古生物学家和地层学家 A. 奥佩尔(A. Oppel, 1831—1865 年)，哲学教授和心理学家 W. 冯特(W. Wundt, 1832—1920 年).

里陈列这种三维画.人群聚集在橱窗前面,逗留在广告画旁边,试图捕捉隐藏的三维图像.人们只要睁大双眼,无须使用任何其他设备,就能亲身体验,在你眼前,从一页纸平面上,突然跳出一幅迷人的三维景象.观赏一幅这样的单图三维画(又称"魔眼"画),就像探寻一个虚拟维——在你眼前的一个隐藏世界.现今电脑中的虚拟现实世界,正是利用三维画技术,创造出对于每只眼睛的电脑显示图像.借助高维和三维图像的数学原理,万物[不论是否真实存在]皆可利用视幻图形表现[2].

不过,对于视幻图形的了解和运用,已经远远超出了消遣或好奇的范围.视幻图形已被应用到与高速公路安全有关的方面.通过研究视幻图形,交通工程师们试用一种醒目的镶嵌图,画在公路接近转弯处的危险路面上,去"引诱"车手们改变车速.图中这些粗黑的条纹和人字形标记,看似等距离分布,其实逐渐变窄,造成一种幻觉,能引起减速:驾驶员在不知不觉中减慢车速,以求每次遇见下一根条纹所隔的时间都相同.为了达到预期效果,条纹的间隔和应用类型经过了严格计算.这样的视幻诱导,对于常在视幻处理路面上行车的驾驶员们有无长久效果,还需要继续检验.



为了使驾驶员减速而设计的路面视幻图形

〔2〕1843年,W.哈密顿(W. Hamilton)发现了四元数,它是现今创作三维电脑图像时的一大法宝.

如上所述，新视幻图形的研究、发展和应用，正在继续进行，并且激起了非专业人士、心理学家、艺术家和科学家们的好奇心. 在不久的将来，或许这些研究将会揭示关于眼和脑功能的重要知识. 正如 S. 达利所说："注视就是思考".

电脑空间不受各种自然约束.没有围墙.……一个可怕的、怪模怪样的地方,原来是噩梦一场.

——D. 丘姆[David Chaum,美国密码学家,电子现金发明人]

数学与你的钱

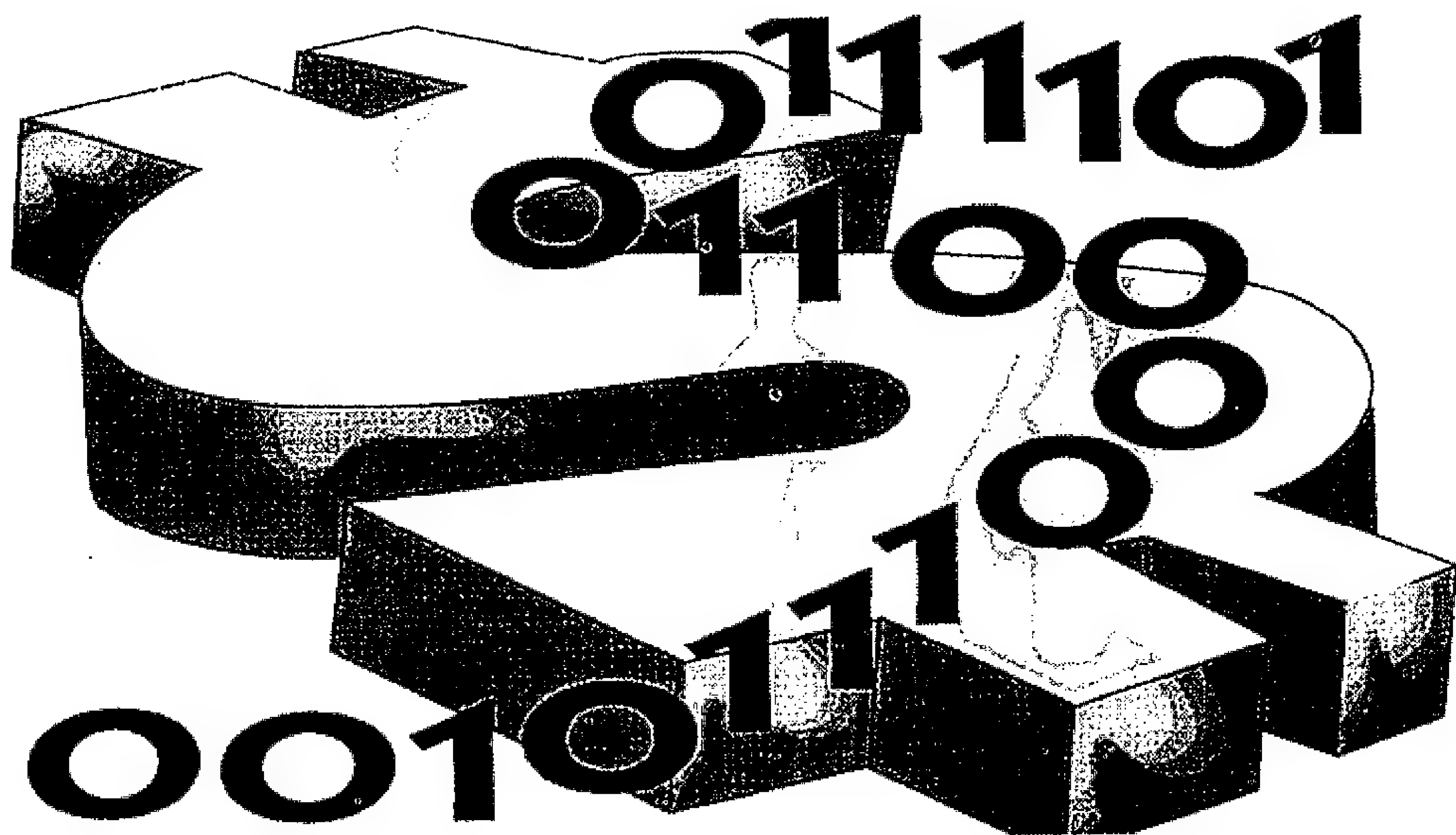
——电子货币与密码术

[在英文里,单词“比特”(bit)原意是“一点点”.使用电脑或其他数码产品时,常与“比特”打交道,这时它的意思是二进数的“位”.用钱时也会遇到“比特”,因为英国人把小铜钱叫做“比特”,而美国人则在行话里把 12.5 美分叫做一个“比特”.]两个比特是 25 美分,四个比特是 50 美分.在这种行话里,所有面额的钱币都能化成比特.钱币的比特可以对应于数码的比特,即 1 和 0[它们是二进数的两种不同数码.这里巧妙地应用了英文单词 bit 的一词多义.在中文里,有时也将“数码比特”译成“数位”].于是我们进入一个新的货币时代.正如壳子和豆子被硬币代替,硬币被纸币代替,纸币被支票代替,支票被信用卡和[银行自动取款机的]ATM 卡代替,现在我们有了电子货币、e-钱和虚拟银行.人们不免产生几分怀疑,几分担心.我们能信任这种新的流通货币和银行事务吗?跟它们打交道,是否令人头痛?有无假冒?我们还能保持使用现金的那种隐秘性吗?我们正处在这种变革的起点.在若干年内,这个变革还不能完全实现,但是它正在逐步发生.慢慢地,我们会变得习惯于电子事务和电子识别.现在似乎什么事情都有一个数字.几乎每件从商店购买的物品都有一个条码.[在美国,每人都有一个不同的社会安全号码]政府根据我们的社会安全号码来确认我们.每辆汽车有一个牌照号码.你可以凭身份证号码去购买电话卡或 ATM 卡.甚至我们的体质也被利用生物统计学进行了数学化,例如眼睛的视力,手的几何形状等.银行的电脑网上有信用卡号码,医院的电脑网上有病历单号码.

我们正在逐渐适应各种各样的电子数据和电子货币.

虚拟银行从何而来?

银行已经每天用电子方式经手大量钱币.它们希望能够进而利用电子处理全部事务.你能否想象,这么多银行,不再清点现金,也不用武装运钞车,会省去多少麻烦?银行业的威力已被电子货币重新界定,并且随着数码货币日趋广泛应用,还将发生更多的变化.有一件事可以肯定,数学将会在我们的笔记本里承担一项重要任务.什么任务?保卫你的钱财安全.在这种需求之下,翻译密码、编制密码和使用密码的方法,



怎样能使人放心呢?随着加密场合的增多,有关技术和硬件不断发展、改进和更新,在这个领域里的数学研究也相应地持续扩展.越来越多的人被吸引到在线虚拟银行,其中有些是由传统银行提供的网上银行业务,有些是银行实体,例如网络银行(NetBank),电信银行(TeleBank),电脑银行(CompuBank),以及展翅银行(Wing spanBank. com).大多数光顾国际互联网银行的人,同时具有传统银行的账户.因为目前还没有想出一种容易方法在虚拟银行里存钱,没有虚拟的自动取款机供人提取现金,也没有任何虚拟的安全寄存箱.有些什么对于虚拟银行的赞

成和反对意见呢？赞成意见是：方便（你能坐在家里上银行），快捷（你不要在银行柜台一米线外等候），每天 24 小时服务，高速互联网节省时间，而且费用较低．每一笔互联网业务只花费几美分，而在真实银行里一笔费用大约要 1.5 美元，虚拟银行能在互联网上少花钱多办事．反对意见是：找不到实实在在的人或实实在在的地方去问讯或投诉．

目前有些什么保障数码信息和 e－钱安全的防护措施？

“密钥证书”加密技术——为了保护隐私，用一个集成电路块，并且利用一个秘密数学公式来加密数据．这种技术也允许授权给代理人用万能“钥匙”获取信息．这种方法有些缺陷，正在探索改进．

公钥密码术——这种方法让电子数据的发件人和收件人利用互相关联的不同数学“钥匙”来彼此检验可靠性，因而可供陌生人交流信息或持续业务往来．电子数据发送者用一个秘密数学“钥匙”将信息加密，收件人用一个不同的相关数学“钥匙”去破解它．两人的“钥匙”既有公共部分，又有私人部分．

私钥密码术——在这种体系中，发件人和收件人拥有完全相同的数学“钥匙”．

数字签名——这种方法用来鉴定发件人是否真实，电子数据是否诚实，但是不能用来对信息加密．

盲签名——这种方法可证明数据来源真实，内容诚实，但不能查询或辨认寄件人．

电子现金将是什么形式？

正如银行和企业用电子方式在银行与账户之间转移钱币，个人也在他们的账户之间转移电子货币，并且通知银行，付一些钞票．收、付电子货币和付钞都没有时间延误，因为电子“支票”以光速传送．理想的方案是用电子方式记载你的财产．银行职员将你的账户留在银行电脑显示器上，同样地，你也能在你的家庭电脑上做相同的事情．你可以立刻查验，你的财务要求是否已经确实支付、转账、收到并记录下来．如有必要，你可以用你的打印机在纸上打印出票据．将来当你想要现金时，你

可以利用你的计算机，下载 x 美元到你的现金卡上或电子钱袋里. 电子现金像普通现金一样，用途广、支付快，可用于许多消费，例如买汽油、进饭店、支付过桥费，或者购买杂货.

现金卡将采用何种方式?

可望备有两种选择：有迹的和无迹的现金卡.

有迹现金卡——选择之一，是凭身份证购买的有迹现金卡. 使用这种卡，你的所有往来，处处、时时，怎样花钱，包括何时何地停你的汽车，付你在图书馆借书过期不还的罚金，在哪里停留喝咖啡，全都记录在案. 尽管你不需要记录你的消费账，你的消费却会每天留下痕迹，成为公开的大众隐私. 美国税务局就能获取你的信息，准备你的纳税申报单.

无迹现金卡——另一方面，如果你想保留你的隐私，你可以选择匿名现金卡，就像使用硬通货现金一样，保留你的私人秘密. 不管你选择何时何地，怎样花你的钱，没有人能跟踪你的电子脚步，除非雇一位侦探对你盯梢.

在以上两种情形下，你都将不再为停车计时器找零钱而耽搁时间，也不必携带装有纸币和硬币的累赘钱包. 取而代之，你将有一张电子译码卡，它把美元数表示成数码比特，再有一个利用数学加密的"钥匙"，以及一个电子签名，可以是数字签名或盲签名.

现今何处使用电子现金?

数码现金卡已经逐步形成了多种形式，并有许多名称：借方卡，聪明卡，电子钱包，虚拟钱包或虚拟现金. 之前曾有一种电子译码交通卡，售价为某一特定金额，用于地铁或公共汽车. 在丹麦、葡萄牙、新加坡和英国，最近已有多家公司推出现金卡. 许多公司[1]开始在这领域中开发和探索潜力. 美国联邦政府目前还没有表现出对于探索、监督或管理电子现金的兴趣. 但这不过是时间问题. 这样一种金融体系的逻辑和成功，表明了在它身后的数学与密码学的有效性.

---

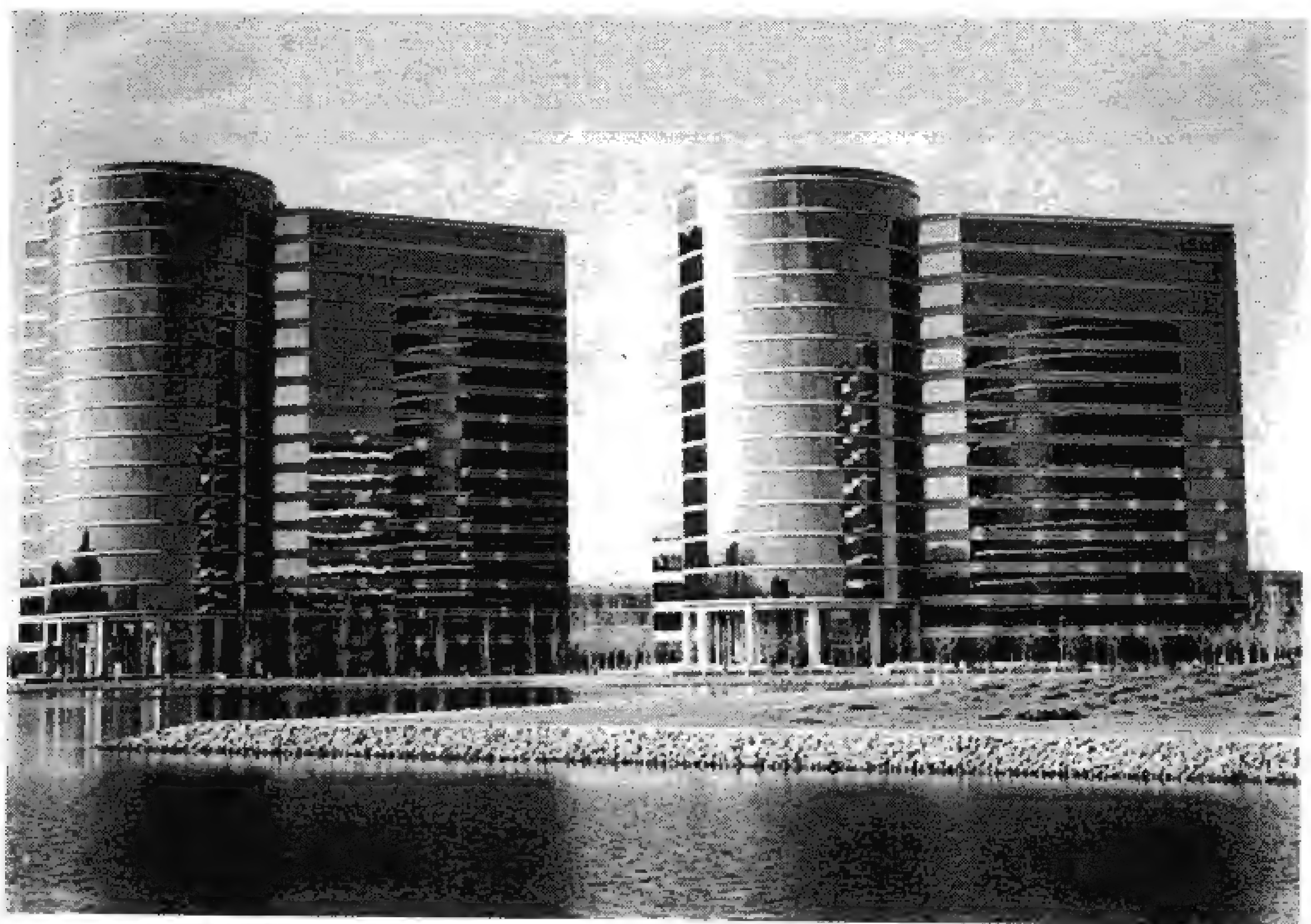
[1] 在这些公司里，有数位现金(DigiCash)，网络现金(CyberCash)，VISA，城市银行(CitiBank)，Mondex，微软，RSA 数据安全公司.

建筑像音乐一样，两者都立足于数学的对称性.

——F. L. 赖特[F. L. Wright，美国建筑师，1867—1959 年]

数学是建筑的框架

我们踏进的每一间屋，走过的每一座桥，看见的每一个塔，它们的形状和整体结构，都受到数学的影响. 数学在建筑里留下这些痕迹的时间，可以追溯到几千年前. 埃及人利用数学，设计了他们的大金字塔. 他们知道勾股定理，并能应用. 他们利用勾股数组，例如 3、4、5，把绳子按照这些长度拉直为三边，得到直角三角形，由此获得他们的金字塔底面



这些大楼形状相似，用高技术装饰外墙，令人陶醉.
美国加利福尼亚州，杉树浜.

所需的直角.巴比伦人解答的许多问题,答案中包含平方根.希腊人证明了勾股定理,并且知道了由此产生的无理数.将这些观念与黄金长方形观念及视幻原理相结合,希腊人建造了他们的著名的巴特农神庙.数学在建筑中发挥作用,从古到今,脚步不停.在古代如罗马的拱门,后来如C.列恩的作品[列恩是英国建筑师,C. Wren,1632—1723年],或者达·芬奇的工作[达·芬奇(Leonardo da Vinci,1452—1519年)不但是著名的意大利画家,也是建筑师和工程师],还有哥特式教堂,拜占庭的清真寺,[印度的]泰姬陵,玛雅人的金字塔,以及[北京的]紫禁城.如今,建筑中的新、老数学足迹汇合,正在影响当代建筑,并将影响未来建筑.过去的经验,结合新的数学观念、新技术和新材料,为建筑学提供了工具,去探索和创造新形态和新的灵巧结构.

我们看见的和曾经看见的，都不过是梦中梦.

——E. A. 坡[E. A. Poe，英国作家、文学批评家，1809—1849 年]

高维空间

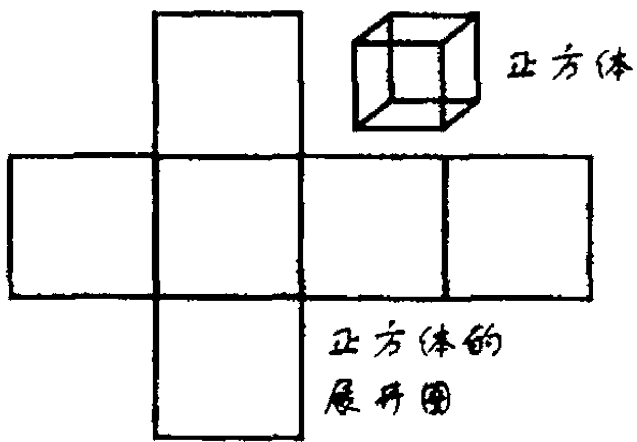
1854 年，G. F. B. 黎曼(Riemann)根据 K. 高斯(Gauss)教授的要求，在[德国]哥廷根大学对全体教师作了一个关于几何学基础的演讲. 他阐述的原理，对于数学和物理学的发展产生了深远影响. 黎曼提出了一种新几何学的观念，一种新的非欧几何学[叫做椭圆几何学]，其中把欧几里得(Euclid)第五公设[1]换成了黎曼的假设[2]. 这种新几何学有它自己的特殊性质[3]. 黎曼也讲了 n 维空间的概念. 他的高维空间立足于对高斯的曲面世界的类比. 一张平坦的纸面是 2 维的. 设想在纸上生活着一些书蠹虫. 在高斯的曲面理论中，假定这页纸弯曲变形，成为一个[2 维的]曲面世界. 虫子们在弯纸上照样爬行，并未觉察它们的世界不再平坦. 生活经验产生一种动力(由纸面弯曲造成)，使它们在弯曲纸面上[沿着两点间最短曲线弧]走捷径，以为这就是它们的直线. 黎曼的理论，将上述弯曲世界类比到高维情形[2 换成 n]. 假定 3 维世界也有凹凸起伏(弯曲). 这里引起弯曲的外力，可以是电力、磁力或万有引

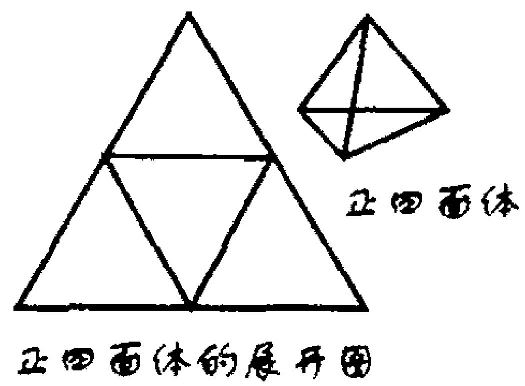
---

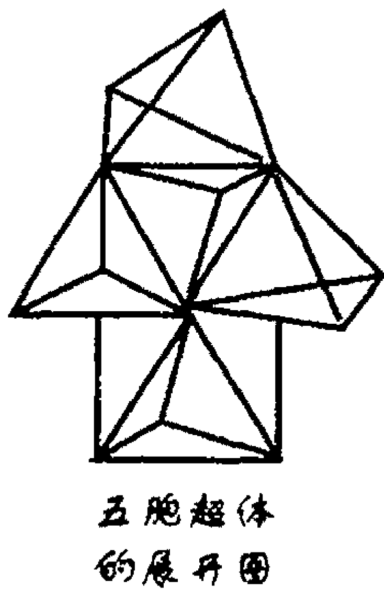
[1] 欧几里得第五公设，[等价于欧几里得的]平行公理，内容是：过已知直线外任意一点只有一条直线平行于已知直线.

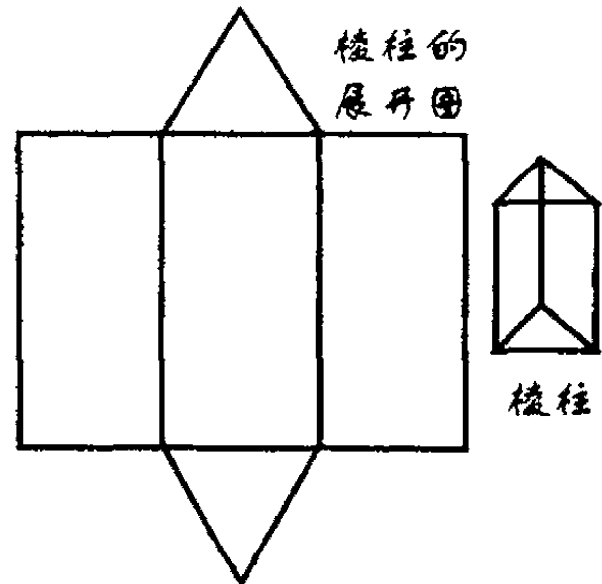
[2] 黎曼的平行公理可叙述为：过已知直线外任意一点不存在已知直线的平行线.

[3] 欧几里得还假定，直线可向其两侧无限延长. 黎曼却假定：一条直线无止境，但不是无限长. 就是说，直线没有端点，但长度是有限的. 这种几何可在球面几何学中实现，这时[黎曼的]直线是球面上的大圆. 在一个球面上，任何两个大圆都相交，因而没有两条[黎曼的]直线互相平行. 此外，在球面上，三角形的内角和总是大于 180°，并且三角形的面积与其内角和超出 180°的部分(称为角盈)成正比.

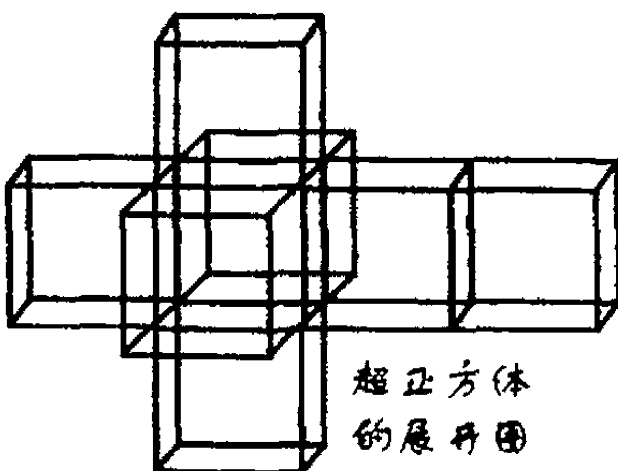


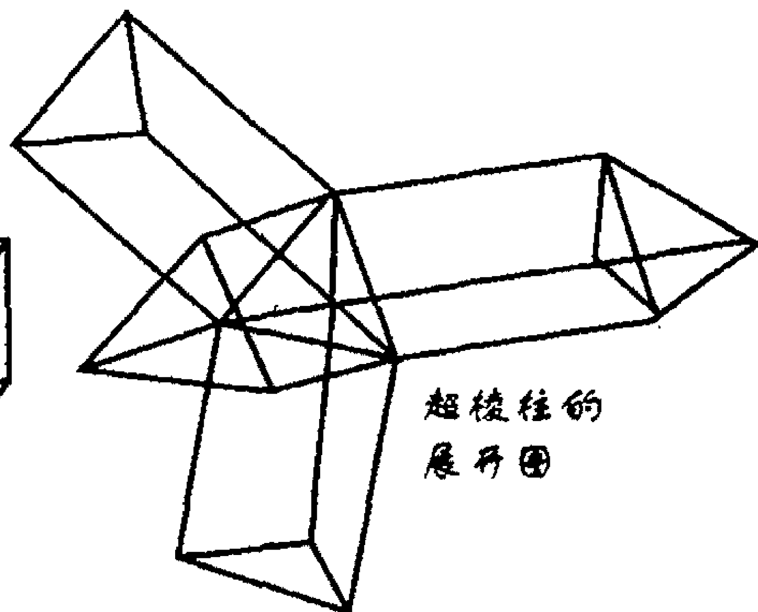






超正方体、五胞超体和超棱柱是高维对象.这里它们被展开到3维空间中,类似于正方体、正四面体和棱柱怎样展开到2维平面里.这些图取自建筑师C. 布拉格顿(C. Bragdon)《射影装饰》书中的素描.





力,它们可以看成第四维,因而得到高维空间[4].高维弯曲世界的想法,可以将我们带往不同的发展方向.例如,可以考虑多连通空间,即存在蠹虫蛀孔的情形[5].黎曼的演讲撞开了一扇通往奇妙新世界的大门.人们发现,自己可被卷入一个新的看不见摸不着的世界,有着如此众多前所未见的闪光层面的世界.难怪它会吸引一大群各种各样的人们前来一睹风采.在这人群里,有 H.亥姆霍兹(H. Hemholtz)、P.毕加索(P. Picasso)、J.佐尔内、列宁(Lenin)、C.欣顿(C. Hinton)、S.达利、H. G.韦尔斯(H. G. Wells)、O.王尔德、W.克鲁克斯(W. Crookes)、J. J.汤普生(J. J. Thompson)、陀斯妥也夫斯基(Dostoyesvsky)、E.阿博特(E. Abbott)、D.黎维拉(D. Rivera),以及许多其他人.

数学家、画家、科学家、唯心论者、神秘主义者和哲学家们,纷纷讨论、争辩和尝试如何理解高维.数学家以抽象方式建立了高维的椭圆几何学.不过,我们在自己生活的三维世界中,却难以直接体会弯曲空间的几何效应.因而,总的说来,当时的物理学家们还没有接受黎曼的观念.他们不公开考虑高维世界,以免遭受嘲笑,因为无法测量的对象不认为是好的科学论题.高维空间成了现代科学幻想小说的题材.

如今高维空间研究引起了新的兴趣.高维空间的数学理论,对于以新观点研究宇宙,发挥了重要作用.高维为理论物理提供了强大工具,可以用新观点来说明麻烦问题和复杂理论[6].例如,可以利用第四维解释光波怎样穿越真空.光既是粒子,又是波.波需要在媒体里传播.真空里空空如也,光怎样通过它呢?可以把光看成第四维的振动.理论物理具体运用高维,澄清了一些困惑多年的观念.统一场论,大爆炸理论,万有理论,多重宇宙,时光旅行论,蛀孔论,并行宇宙论,簇宇宙论,10

---

[4] 在数学里,在长、宽、高之外,再考虑一种其他因素,就得到空间的第四维.而在物理学中,例如在爱因斯坦(Einstein)的[时空]理论中,通常把时间看成第四维,并且不把时间算在空间的维数里面.所以,在物理学中,如果空间是四维的,那么时间就成为[时空的]第五维.

[5] 为了理解蛀孔,让我们回顾书蠹虫的世界.设想有一叠纸,被蠹虫啃食,产生一些穿孔,每页纸都有裂缝,不同纸页沿着裂缝互相连接和贯通.虫子可以从一页纸(自己的世界)出发,顺着蛀孔(纸缝),爬行到与这页纸沿蛀孔相连的其他纸上.

[6] 例如爱因斯坦的理论和量子物理.

维和 26 维的超弦论[7],这些都受惠于在一个多世纪以前发源的数学观念.不是孤立的研究,而是在全世界各研究室广泛研究利用高维的理论,写出了无数论文.

我们或许已进入一个新的时代,在这里,许多深奥的观念和理论主要依靠智力理解,难以用其他方法衡量.所以数学能在这里发挥巨大作用.虽然人们觉得数学提供了测量的工具,但是数学其实也提供了描述和衡量不可测性质的工具.虽然我们看不见高维,数学却能在纸面上创造出三维图形.它们通过数学方程而存在.它们出现在公式里,数学式里和几何里.它们为科学探索提供了手段和工具.

[7] 在一种超弦论中,世界上所有形式的物质和能量的组块都是无穷小弦.在大爆炸以前,宇宙是 10 维的(或 26 维的),其中有 9 个空间维和 1 个时间维,但是很不稳定.所以发生大爆炸,使宇宙膨胀成只剩 3 个空间维.它还在继续膨胀.其余六维被缠绕后,装进一个尺度为 10^{-33}cm 的紧凑几何框架.这些对象如此细微,说明存在许多比原子更小的粒子,它们在击碎原子以后被相继发现.进而发现,这些弦的振动和延展自由度超过弦乐器.以上这些由振动产生的情况,据信可确定物质和能量的所有形式.

我画的是我思考的，不是我看见的.

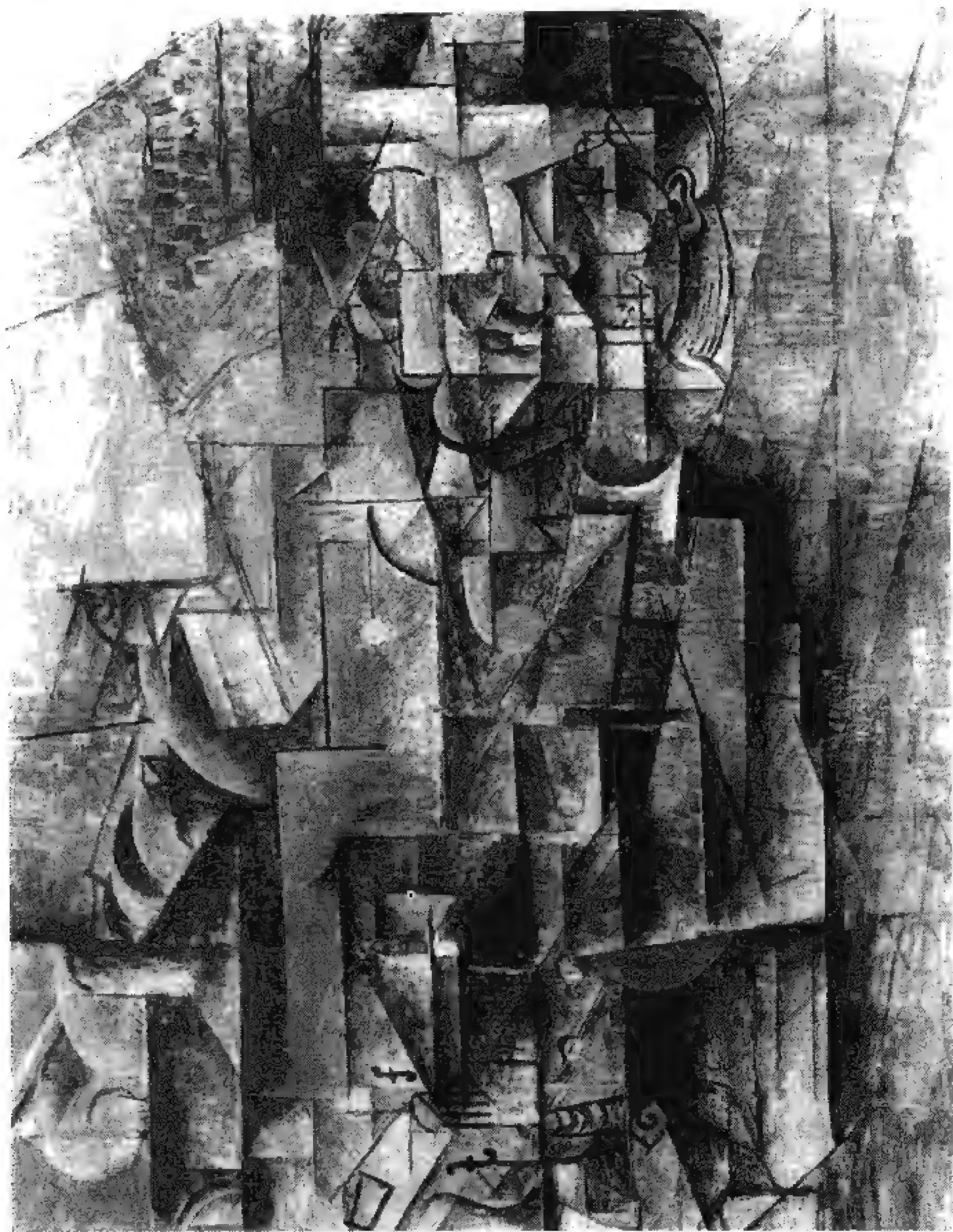
——P. 毕加索[西班牙-法国画家，1881—1973年]

数学与立体主义

在1907年前后，P. 毕加索和G. 勃拉克(G. Braque)开创了一种新的绘画风格，此后到1914年的一段时期内，被另外一些画家采用并发挥. 在这些画家里，有A. 格莱兹(A. Gleizes)、J. 梅灿热(J. Metzinger)、M. 杜尚(M. Du Champ)、F. 皮卡比亚(F. Picabia)、F. 莱热(F. Leger)，以及J. 格里斯(J. Gris). 这种艺术被称为立体主义. 当时美术评论家沃塞勒(L. Vauxcelles)评论道："这些新作品像一群小立方体."不过，他的评论容易引起误解. 这些新作品并非只是立方体的堆积，而是一种全新的描绘对象的方式. 用毕加索的话说，"我画的是我思考的，不是我看见的."

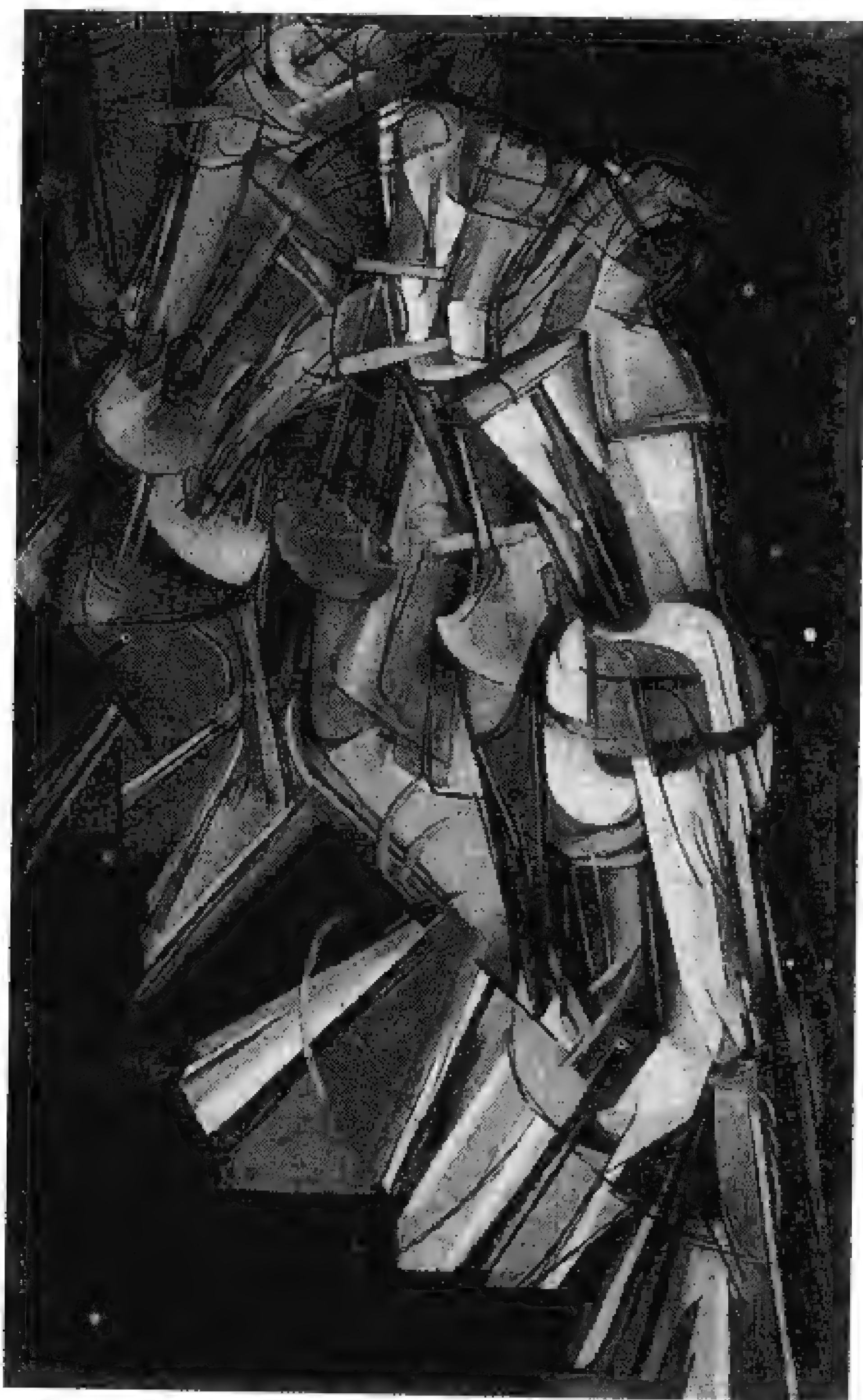
当画家们用这种前卫风格绘画时，是什么念头占据着他们的头脑呢？他们运用立方体，不仅是表现他们画中的物体，或是贯彻塞尚(Cézanne)的信念"自然界万物都由立方体、圆锥和圆柱粘合而成". 立体主义者运用这些基本几何对象作为模型，他们在探索一种新的真实感，在一个全新框架里，一个新维和时间新感觉的框架里，来描绘对象. 转入20世纪以后，非欧几何、高维数学和爱因斯坦的时空维数，影响了这些画家对世界的印象. 黎曼的高维空间和椭圆几何，在社会的一个层面里引起好奇. 对高维世界的讨论，不限于数学家，也燃起了政治家、画家、诗人、科学家和门外汉的兴趣. 在20世纪初，第四维和更高维的数学观念，以及奇怪的非欧世界，引起一群法国画家的注意. 星期六晚上，他们聚集在德弗勒吕斯的斯坦沙龙，讨论这些观念. 数学家M. 普林塞(M. Princet)在此介绍这些新几何学的观念. 也是在这段时期，著名法国数学家H. 庞加莱(H. Poincarè)在他的各种著作里，讲解一种非欧

世界，既有概念，又有描述. 这些讨论和著作，促进了公众的兴趣，特别是画家们的好奇心，结果出现了立体主义. 也许，这就是毕加索和勃拉克作画时头脑中的一些想法.



人和小提琴，毕加索作(约 1910—1912 年)
费城美术馆，路易丝和瓦尔特·阿伦斯伯格藏品

几何学影响艺术，这不是头一回. 几何学，无论欧氏的或非欧的，都是数学的一种概念形式. 它所研究的，是现实物体，我们亲眼所见并且拿来占据空间的物体. 画家在作画过程中，变换或填充空间，图示空间，需要了解它的维数. 在拜占庭时代，宗教绘画艺术采用二维方式. 文艺复兴时期发现的射影几何，帮助画家捕捉三维世界的真实感. 射影几何的元素(投影点、在画面上汇聚的平行线、消失点)让画家把二维的油画变成三维世界. 不过，正如椭圆几何可以是高维的，画家的作品也不必局限于三维世界. 所以这种新几何引导出一种艺术新风格.



下楼梯的裸女，杜尚作(1912). 费城美术馆，路易丝和瓦尔特·阿伦斯伯格藏品

在立体主义中，利用多种角度的不同几何形状，表达一个体的多方面，因而把它变成一个超体[1]. 画一个超立方体，要同时显示组成它的全部八个立方体. 类似地，画家可以同时显示物体的所有方面（前、后、侧、顶、底），不必顾及"逻辑"顺序. 在毕加索的画《人和小提琴》中，我们的眼睛可以追逐形体的轮廓线，但是我们的视觉却困惑不解，因为这幅画的路子不同于我们在自己的三维世界中的任何经验. 在立体主义画家的一幅画里，一个体可以同时兼备多个剪影或视象，每个剪影各自表现一个不同时刻的形象. 上述画中的小提琴及其部分，在画面不同位置多次出现，画中的人也同样有多个剪影[重叠在一起]. 在勃拉克的画《人与吉他》里，也可获得类似的体验. 在莱热的《三个人体》画中，人体的多重面，以及身躯的移动，使人迷茫. 眼睛无法判断，从何开始去看这幅作品. 而在 M. 杜尚的画《下楼梯的裸女》里，人体走下楼梯的一连串动作全部同时出现.

如日常所见，时间表现为空间中的事件发生过程. 但在立体主义中，空间和时间似乎已经成为统一整体. 与文艺复兴现实主义艺术不同，立体主义描绘对象时，经过了人的思想对被画场景的整理，画出来的不是在我们世界里直接看到的模样. 所以立体主义绘画不必遵循我们所知的既定时间顺序，而是改成用形象去表示一个在多重时间段内多重透视的崭新世界. 立体主义画家能描绘高维世界里的不同维和不同瞬间. 虽然立体主义时期本身存在时间很短，但它在现代艺术中却留下了难忘的一页.

[1] 在数学里，词头"超"表示高维，例如超立方体是从三维立方体增加第四维得到的图形.

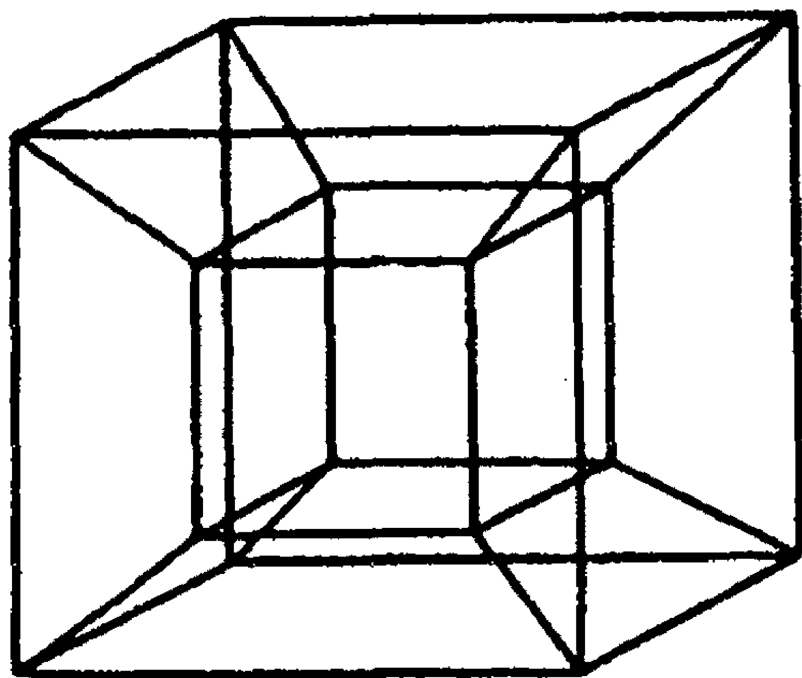
数学的奇妙现象，不在简单算术里，虽然算术在日常生活中如此有用；也不在数里面，虽然数是神的武器，神在墙后摆弄着数.

——L. 柯布西耶[Le Corbusier，法国建筑师，1887—1965 年]

德方斯大拱门

——智能建筑

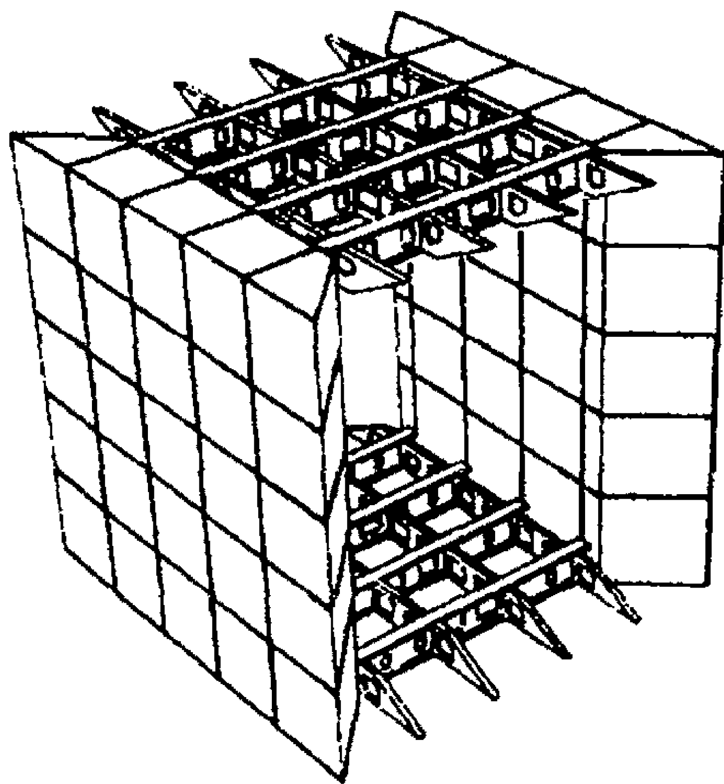
在法国巴黎的德方斯中心，全景电梯带着你穿越"云雾"，升到大拱门的顶上. 这个建筑奇观采用了简单而优美的立方体模式. 虽然德方斯大拱门立足于这一经典形状，它那格调统一的优美设计，却具有未来派的气质. 不过，它也不是立方体的本来模样，而是一个中空的开放的立方体，大立方体里面套着小立方体，是一个变异立方体，每边长度约 360 英尺[差不多 110 米].



德方斯大拱门的款式，比标准立方体难造得多. 但是，它的美学价值的重要性，远远超过了建筑方面需要解决的问题. 它不能一层一层往上砌，因为腹内必须留下庞大空间. 所以，在它体内密密麻麻嵌着钢铁骨架，每隔 21 米就有粗大的立柱支撑加固，又有缆线和管道交织. 工程采用预应力高强度混凝土[1]，具有高度

[1] 造一座普通的桥，每用钢材 1 立方码[约为 0.76 立方米]，配混凝土 264 磅[约 120 千克]. 而德方斯大拱门每立方码钢材的混凝土用量多达 750 磅[约 340 千克].

承受力，能适应各种水平的外力.



每个局部框架是一个“迷你”立方体，一个独立的七层中空结构，它的负荷传递到大框架上. 立方体有 12 根柱，每根柱子承受重量多达 30 000 吨. 由于总体结构很重，必须预先进行许多计算和估计，判断这个结构对它的石灰石地基的影响. 对于每个方面，都有大量数据输入电脑，进行分析. 编写了高维数学模型程序，来解答各种工程问题. 立方体形状不如金字塔稳定，所以必须解决有关大拱门斜角压力的问题. 大拱门的顶盖，即屋顶(又称为天桥)，设计为每平方米承重 1 吨. 立方体的底面，坐落在地面以下 35 米的石灰石上.

怎样才能探测到关系大拱门寿命的损伤或结构问题呢？可疑结构用电线连接到三台独立的计算机，用来监视这些结构的移动或其他毛病. 例如，12 根柱子里，每一根都装有听筒架，连接着 150 个电子听诊器，他们能探测到最轻微的移动或振动. 如果塔门偏移哪怕只有几毫米，那么塔门的尼奥普林合成橡胶减震垫(四英寸厚[约 10 厘米厚])可以利用 2 000 吨水压千斤顶移动位置，纠正偏差. 由于整个结构配备了复杂的高性能电脑智能系统，所以德方斯大拱门通常被称为“智能建筑”. 在这个智能建筑中，安置了一些由电脑控制的机器人，用来监视和传递信息. 不要被它的名称迷惑，它不仅是一个拱门，也是一幢大楼，里面有办公室、会议室、剧院、礼品店，等等.

这个结构是谁的主意？1982 年，法国政府发起国际建筑竞赛，征集一个设计，要使德方斯中心成为世界关注的焦点和顶点. 德方斯大拱门的设计者是丹麦建筑师 J. O. 斯普雷克森(J. O. von Spreckelsen)[2]. 他

[2] 斯普雷克森推荐法国建筑师 P. 安德勒执行他的设计方案.



法国巴黎德方斯大拱门

让它位于巴黎城历史上形成的东西方向主轴线(大道)上,与卢浮宫、协和广场及其方碑、凯旋门和香榭丽舍大道排成一行,因而从德方斯大拱门顶端一路望去,眼底尽是巴黎丰功伟绩.进而,斯普雷克森有意使德方斯大拱门偏离轴线 6°,以便从凯旋门沿大道看它时产生三维透视效果.人造材料的“云雾”[3],布置在立方体的空心区域里,给空间内部带来深度感.德方斯大拱门是一个美学的、智能的和建筑学的奇迹.

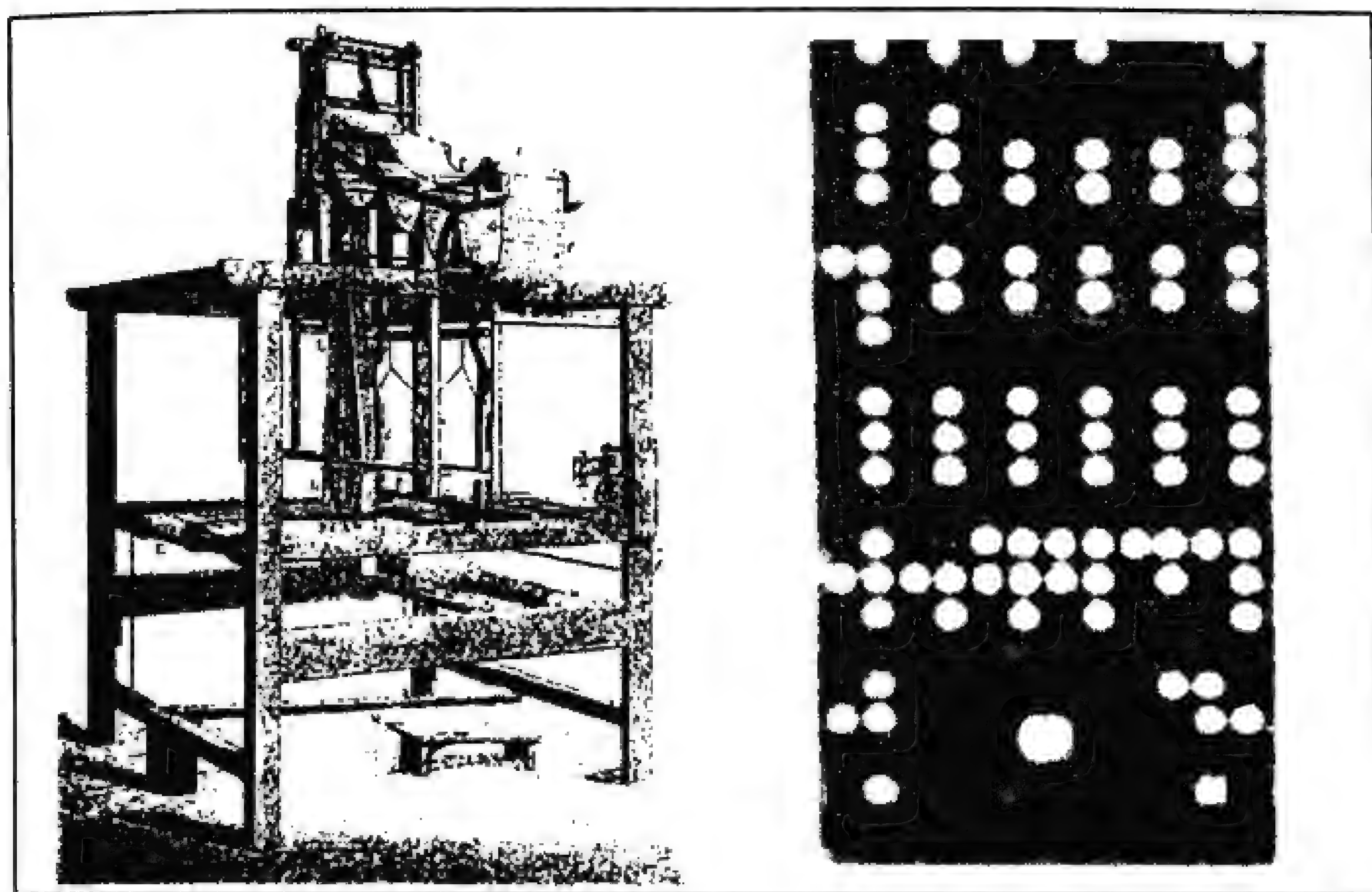
〔3〕在杆和线的框架上,覆盖着纤维玻璃材料,预先将材料进行过拉伸处理,并在外表涂上特弗隆.

人们已经成为自己的工具的工具.

——H. 索洛[Henry Thoreau,美国作家、哲学家,1817—1862 年]

数学的潘多拉盒子

多少世纪以来,人类一直在寻找新工具,改进旧工具.涉及数字、运算和计数的问题变得越来越复杂,用于繁琐计算的工具也发展得速度越来越快,精确度越来越高.我们已经从古代在骨或杆上刻痕和结绳记数,发展到后来的算盘,直至今天的家用电脑.旅程变幻迷人.1614 年左右,J. 纳皮尔(J. Napier)发明了对数和著名的纳皮尔算筹(在一个盒子里装着一些用于计算的细杆),海员和商船携带这种算筹,帮助计算.



雅克尔的织布机,以及用来记录织布机程序的穿孔卡片断

在 1620 年和 1621 年,英国数学家 E. 甘特(E. Gunter)和 W. 奥特瑞

(W. Oughtred)利用对数概念,[各自]造出了最早的滑块计算尺.后来出现机械计算器,B.帕斯卡发明了一种(他的1642年加法器),G.莱布尼兹发明了另外一种(他的1673年计算器,能进行加减乘除),帮助那些承担单调冗长计算任务的人们进行计算.另一重大突破,意外地出现在纺织行业里.1801年,J.M.雅克尔(J.M.Jacquard)发明了一种特殊的织布机,能接受利用穿孔卡编制的程序指令.20世纪初期,C.巴比奇(C.Babbage)设计分析机,利用穿孔卡编制指令,打算在这机械上进行更复杂的数学运算.不幸他的差分机和分析机在他生前未能实现,但是他的计划燃起新的智慧火光,让人们看到,在计算机上可能执行怎样的任务.

在20世纪里,人们就像打开了潘多拉的盒子.[在古代希腊神话中,少女潘多拉由于好奇,打开了宙斯神赠给她丈夫的盒子,不料盒内所装的各种恶习、疾病和灾祸立刻飞散出来,危害人类.她急忙重新盖上盒子,却已只剩希望留在盒中.后来人们常用"潘多拉盒子"比喻灾祸的来源.这里用它形容无法控制结果的事件.]1907年,L.德福雷斯特(D.Forest)发明了电子管,可以取代机械计算器中的连杆和齿轮.1942年,J.V.阿坦索夫(Attansoff)和C.贝里(Berry)发明了最早的利用电子管的计算机(Computer),被称为ABC计算机(Attansoff Berry Computer).计算机把用二进数表达的数据储存在电容器里,使二进数获得一种新的重要应用(0和1分别表示电路的切断和接通).从此以后,英文单词"Computer"["进行计算的……"]不再限于表示一个进行具体计算的人["计算者"],而是更多地用来表示一种可进行计算及其他功能的机械["计算机"].现代的(硅片、集成电路、固态)计算机,使我们办理一切事情的方式都发生了彻底革命——从医学检查,到打电话、邮寄物品、跟踪罪犯、描绘疾病传播情况、理财、画图、拍电影、科学实验、制作广告,乃至互联网通讯.大多数人运用计算机时,都只发挥了它的一部分威力.人们为了探寻更多的计算机威力、更多的计算机存储、更多的计算机应用,所作的持续努力,是否就此停步呢?不.正如在希腊神话中,潘多拉盒子一旦打开,逃出盒子的东西再也回不去了.21世

纪的计算机领域，前景如何？或许会寻求有关的数学工具，以便能造出量子计算机、分子计算机和光学计算机.寻求模糊逻辑怎样成为人工智能和软计算的纽带，从而刷新计算机能做什么和怎样完成任务.寻求计算机模型和细胞自动机，用来探索多变的宇宙.寻求纳米世界的虚拟计算机，去完成原子尺度的任务.寻求能将几乎任何其他工具融入自身的计算机.——还有，如果什么事情出毛病了，找一个计算机替罪羊.

数学分析像大自然本身那样辽阔.

——J. 傅立叶[J. Fourier，法国数学家，1768—1830年]

数学与人的身体

现今我们已经知道，在解剖学和医学中，留下了数学的深刻烙印. 千百年来，科学家和医生们总是设法治病和了解人体机能. 刚开始用数学工具研究人体，是想确定人类体形的天然比例，分析人体各种形态下的曲线. 古希腊雕刻家菲狄亚斯(Phidias)在他的雕塑作品中早已应用了这种天然比例. 后来的一些画家，例如达·芬奇和A. 丢勒，试图将人体形状数量化. 伽利略将人体心跳韵律与钟摆比较，发现了心跳规律具有时钟式结构. 如今，对于人体形状和机能的数学研究正在不断发展. 找出了人体机能的许多标准数值和比例值，例如血压、胆固醇水平、低密度脂蛋白的比例、高密度脂蛋白的比例，以及用心电图和磁共振成像技术获得的图像. 目前医学界正借助大量数学概念、计算和发明，试图揭开人体之谜. 现将其中部分工作简介如下.

• 螺旋扫描机. 利用连续的螺旋形CT[计算机辅助断层成像技术]，扫描图像. 过去的扫描机只处理单个截面的CT扫描，而这种新机器设计为沿着三维螺旋线扫描，因而提供更完整的信息.

• 在23对人类染色体中找到的遗传信息图. 由许多遗传学家协作研究，利用计算机，对于全部80 000到100 000个人类基因，画出基本对的图册. 人类基因组计划在2003年左右完成.

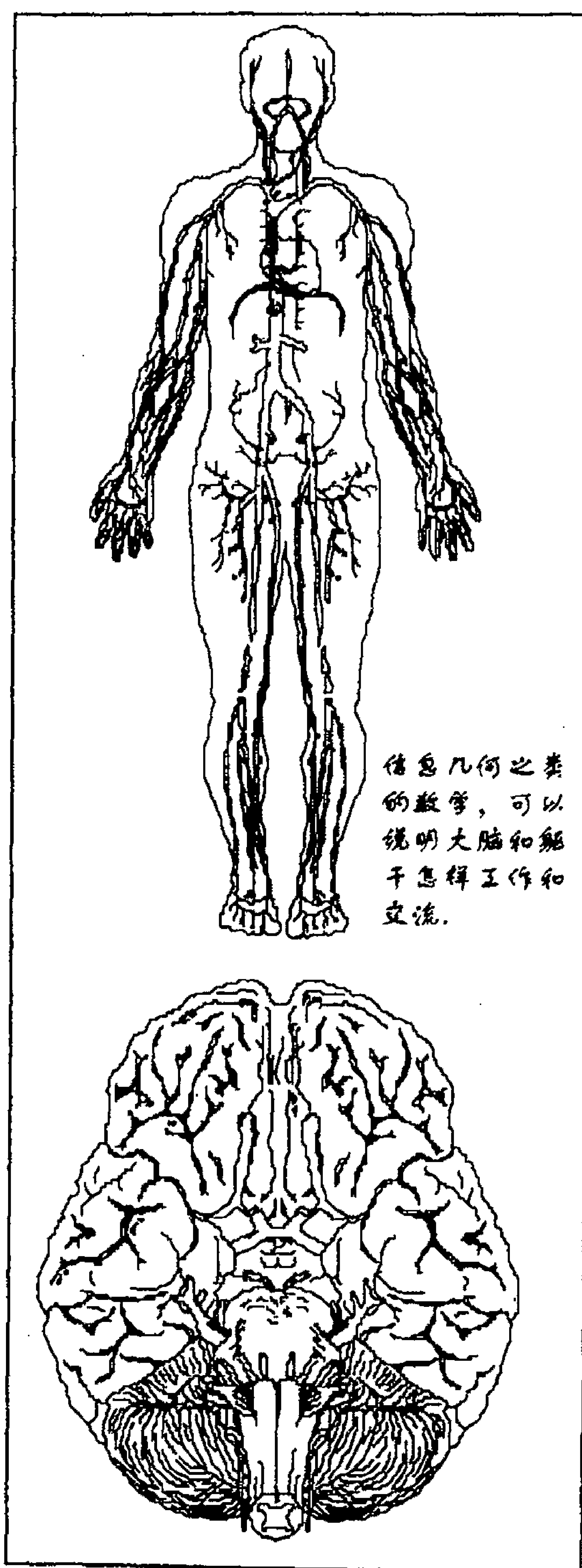
• 软组织牵动时的压力. 利用几何学及计算机模拟进行计算.

• 混沌理论与复杂性. 探索与心跳节奏、大脑活动等的联系.

• 计算机技术、图像与模型. 用来填补空隙，正如人脑通过推测周围信息来填补盲点.

• 分形几何. 现已能用于早期发现骨质疏松症. 骨骼的构成，类似

于蜂房结构. 可利用分形描绘骨质的生长和变化. 如果一块骨头的蜂房结构开始损坏，那么可以利用 X 射线数码图像或磁共振图像，结合计算机技术，确定这块骨头的分数维是否减少，从而探测出骨质的退化. 这些分数维能表明骨质疏松症已经开始，于是不等骨质衰退，就能及早测出病变. 这种改进的测量骨骼分数维的方法，是美国纽约州立大学布法罗分校的 R. 阿查里雅(R. Acharya)提出的. 为了求得骨骼的分数维，阿查里雅利用一种以数学形态学为依据的非线性算法. 最近，分形还被用来描述离子通道和经过这些通道的运动.



信息几何之类的数学，可以说明大脑和躯干怎样工作和交流.

• 二元光学. 用来研究特定的光束.

• 一种新的数学模型，用来描绘细胞形状.

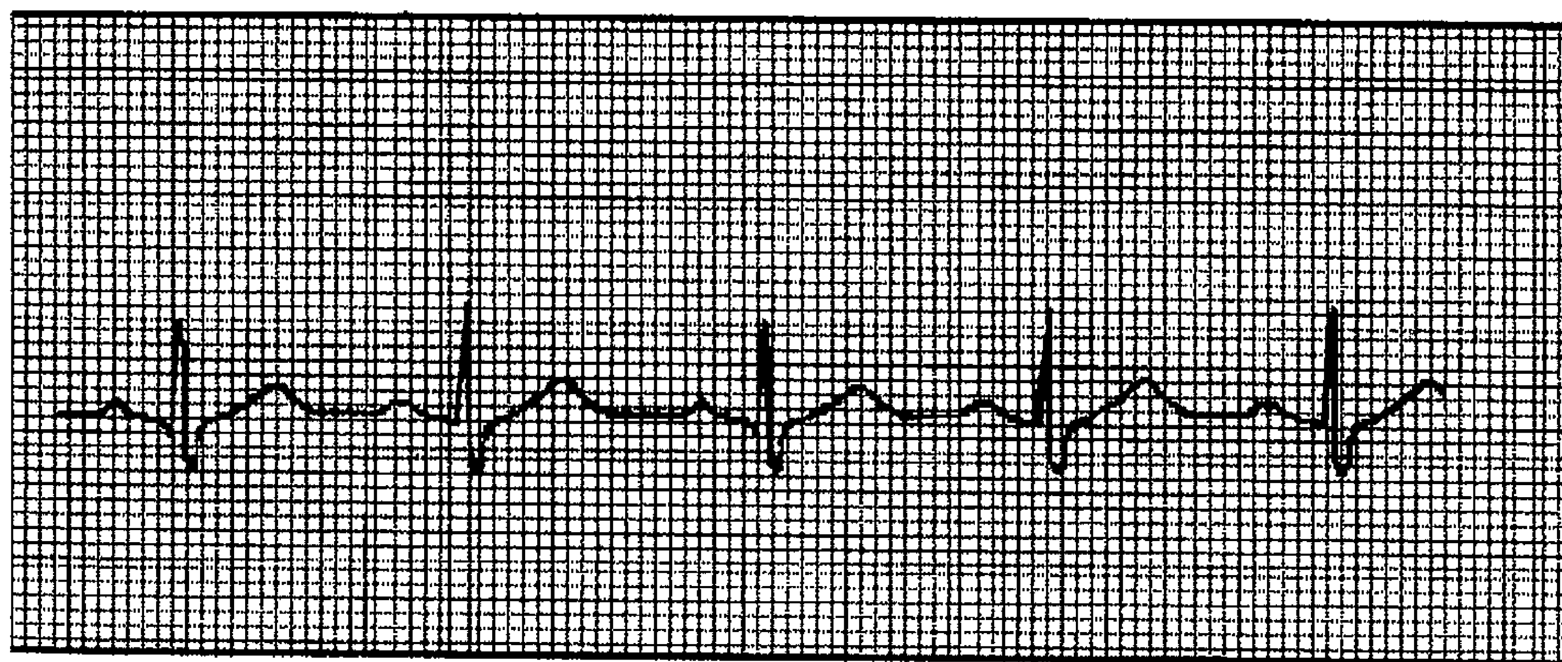
• 纳米技术和纳米单元. 用来测量和描述人体紊乱，可能会由此发展出一种战胜病毒的技术.

• 呼吸的数学模型. 这是为了帮助和模拟呼吸而发展起来的一种技术.

• 亚当和夏娃三维人体图. 是男性和女性人体的计算机图册.

• 计算机用来分析和辨认物质中的 DNA,几分钟即可. 根据这样的信息,可辨认出癌细胞的类型,从而使用针对这些特种细胞的药物.

在以上的列表中,还要加上一项最新颖的研究,就是探索人脑如何工作. 谁能想到利用几何学帮助解释大脑? 数学能够! 根据一些数学家和统计学家先前的工作和想法[1],日本数学家甘利俊一(Shun'ichi Amari)探索大脑未解之谜. 他把人看成一个逻辑与直觉的合成体. 直觉包含整个身体与其自身通过神经网络的通讯. 决定、思考和观念由逻辑与直觉组合而产生. 信息通过神经传遍全身. 甘利俊一设法利用数学技巧去理解并说明上述过程是怎样进行的. 什么类型的数学呢? ——那是一种由他创造并命名的几何学,叫做信息几何学. 这种几何学研究信息怎样在大脑里形成和交换. 它是一种包含信息拓扑、微分几何原理、收敛论,以及概率和统计的数学理论. 正如甘利俊一所说[2],"这是



心电图中的一种正常心脏正弦韵律

[1] 其中包括:(1945 年)印度统计逻辑学家 C. R. 劳(C. Rao,他把统计学看成一种弯曲几何结构),(1970 年)苏联统计学家 N. N. 琴佐夫,(N. N. Chentsov,1979 年)美国统计学家 B. 埃弗龙(B. Efron,他指出需要发展一种统计几何学).

[2] Akio Etori, *Think About It*, LOOK JAPAN, 1994 年 2 月.

一种非常大胆的想法，用微分几何去研究神经网络.……我们提出一些问题，例如，为什么像神经网络之类的信息体系工作得这样出色？什么原因使它们如此优秀(对于传统计算机)？有些问题需要数学洞察力."

数学与人体相联系的例子，还在继续扩展.所以，医学专家需要与数学家合作，去研究怎样利用强大的数学工具阐明人体的机能.

它（计算机）的命运是在我们的生活里消失，正如所有那些我们不关心的事情，例如关于手表、纸和铅笔的技术问题.

——艾伦·凯[Alan Kay，被称为“个人计算机之父”，美国人]

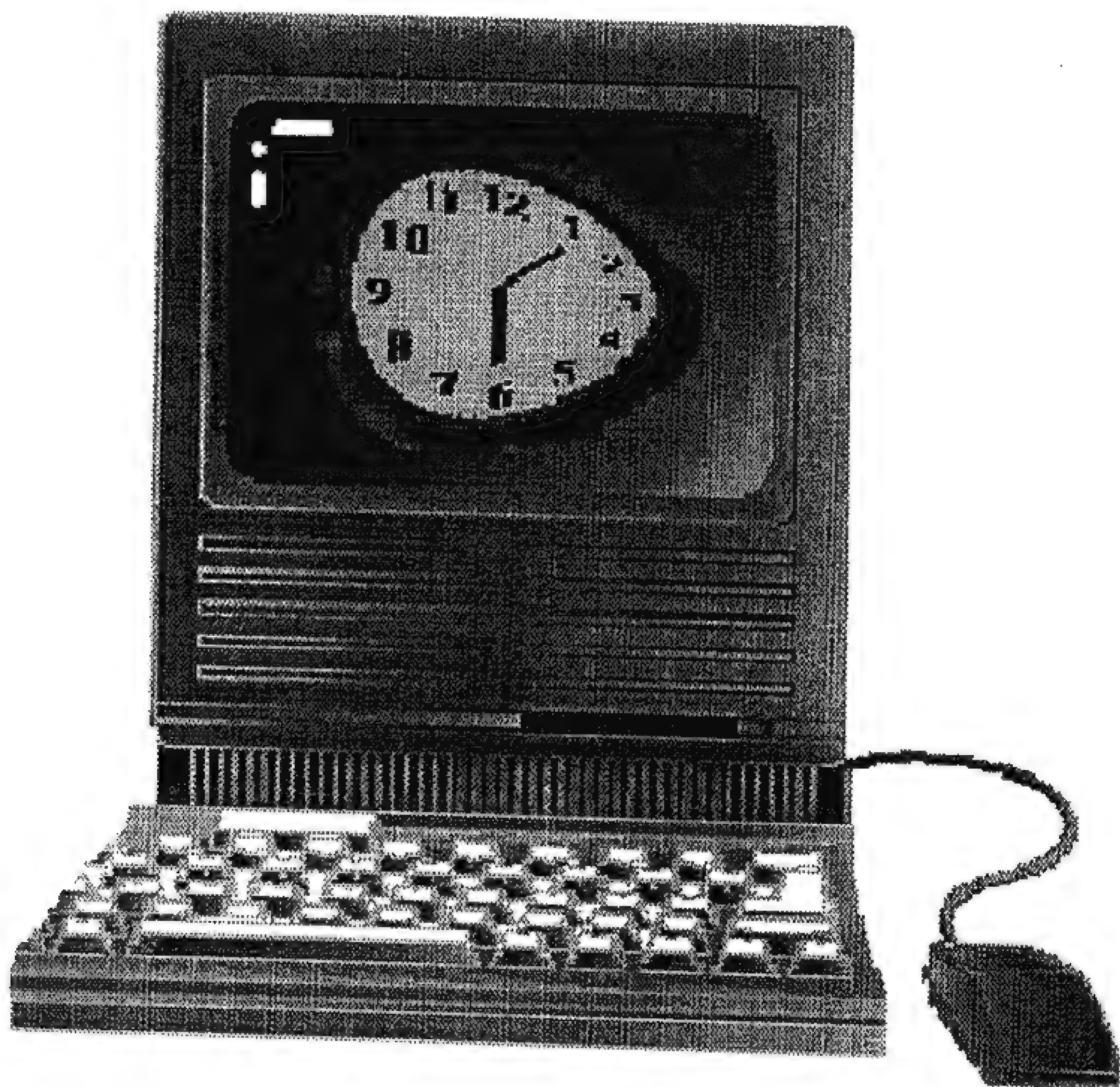
计算机将有量子跳跃？

在门外汉眼里，计算机的速度出奇的快，计算精度惊人的高. 在一页纸上，将若干行数目相加，来计算我们的个人所得税，这些日常事务，令人感到冗长乏味，但对微型计算机而言，不过是儿童游戏罢了. 可是，科学家们需要处理太多的信息，他们的特殊任务、实验和计算，即使利用超级计算机，也需要算上好多小时，甚至好多天，在多卷信息中转来转去. 他们觉得计算机太迟钝了. 于是计算机科学家们不断巧妙地设计程序，改进程序，以求缩短繁重计算任务的完成时间. 这些努力的趋势逐步明朗，要求现有计算机朝着一个确定方向继续改进. 庞大数目和繁多数据的应用，包括寻找大素数、分解[大数]因子的方法和密码术，为量子计算机提供了需要和可能.

什么是量子计算机？与常见计算机不同，量子计算机利用量子力学的原理和性质. 它的好处是可以利用量子论中讨论的多重能态. 而传统计算机的设计却是围绕着电学的两个能态，“关”和“开”. 直到不久以前，探索这种计算机新后代的兴趣还很小，因为利用新芯片、新硬件和新软件，已经成功地改进了普通计算机. 但是，我们期望计算机能承担庞然巨数的计算任务，或者能同时沿着多条途径向前推进. 这样一种计算机，将从多方位处理问题. 来自每个复杂任务的信息，都将被统筹考虑，以惊人的高速度解决问题. 这样一种计算机的运算方式，从某种意义上说，有点儿类似于一位初学者和一位有经验的人用不同途径处理下面的算术问题：

$$\frac{8}{15}\times\frac{9}{20}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}.$$

初学者着手解题，先将前两个分数相乘，然后将所得结果与第三个分数相乘，再将乘积与第四个分数相乘，最后将所得结果约简.有经验的人会直接约简算式中的公约数，因而少做乘法，简化步骤，很快得到答数“1”.



处理复杂问题，例如分解特别大的整数，这种任务很适合量子计算机，对它来说很简单，因为它能假定多重能级分别同时取多个不同途径，以便解答问题.事实上，美国新泽西州 AT&T 贝尔实验室的 P. W.

肖尔(W. Shor)已经解过了,他在一台具有量子力学原理功能的计算机上,分解一个大素数(超过 100 位的数),快得难以置信. 他的工作提供了双重动力,既推进量子计算机的发展,又指引量子力学和量子物理朝着计算机科学的方向航行. 有了这条新路,量子计算机将有立足之地,它们的发展和应用,对于量子物理学各部分的进一步发展,可能是一个好的征兆. 一台量子计算机,自然,将会寻找一切同时存在的可能情形,但是一旦找到答案,所有其他可能性不复存在. 这种优点,使它适合于某些类型的问题,例如密码学中的问题,以及搜索大数的素因子问题. 利用量子计算机的这个特性,问题解决将拥有新的手段. 什么时候计算机才会有量子跳跃呢? 从技术方面看,随着核磁共振成像技术(MRI)和硅片的发展,电子自旋将能被利用、被探索、被关注. 量子计算机登台亮相,不过是时间早晚而已.

什么是量子? [微观]电子可以看成在围绕原子的轨道上的一片闪烁的云. 当电子受力后,它跳跃到一个较小的轨道,同时能量释放出一个量子(光的粒子). 如果这个电子受力跳进一个较大的轨道,那么原子能量吸收一个量子. 随着吸收量或释放量的不同,产生不同的能级. 由此形成了[微观]粒子多重态的假设[不同状态具有各自的存在概率]. 使人困惑的是,这些粒子有一些看上去自相矛盾的性质. 例如,一个粒子怎样能同一时刻位于不同的点,怎样能同时取一切可能途径,至今仍是一个谜. 一旦观察到一种状态,其余可能情形就不存在了. 类似地,量子计算机中,不用普通的位(bit),改用量位(qubit,一个量位可以是一个 0,或一个 1,或表明电子自旋的若干 0 与 1 的混合体). 测量一个量位,结果得到一个 0 或者一个 1.

山不是棱锥，树不是圆锥. 上帝一定会喜欢枪炮和建筑，如果欧几里得是他的唯一的几何学家.

——T. 斯托帕德[T. Stoppard，英国作家，1937 年—　　]，《世外桃源——阿卡迪亚》

数学、毕尔巴鄂和盖里

建筑像美术一样，天生就联系着数学和物理学观念. 如果没有数学概念和物理概念，房屋的结构及其整体性就成了问题. 当我们环顾四周，首先映入眼帘的，是一些属于欧几里得几何的对象. 我们看到早已熟悉的形状，例如圆、球、正方形、三角形、长方形，以及各种几何体；这些[简单而基本的]形状类似于某些天然物体，例如一轮明月，一只橘子的形状，或者水晶的外观. 看得更仔细些，并且跳出欧几里得框框，我们就能察觉许多从未被欧几里得描绘过的[复杂]形状，它们在我们周围事物中占有主导地位. 大多数建筑设计，特别是 20 世纪以前的设计，往往以欧几里得图形为蓝本. 如今的建筑设计，则已冲破旧框架，接受了欧几里得以外的图形和观念. 新的材料，新的建筑技术和工艺，让建筑师们能实现往日梦想中的结构. 1970 年，美国加利福尼亚州旧金山市建造的圣玛丽教堂，就是一个这样的设计，它的屋顶内部形状是大片的双曲抛物面. F. 盖里(F. Gehry)设计的古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆，是另一个例子. 它的大胆新颖建筑形态，面向 21 世纪，这样的形状，过去只能存在于建筑师们的想象之中.

这幢威武雄壮的大楼，形状远离传统，是从欧几里得几何体利用拓扑变换得来的. 从盖里的作品里，我们看到了活生生的橡皮膜几何.[橡皮膜可以任意连续变形，即伸长、缩短、扭弯、拉直，但不断裂，也不自相粘合.]在这个建筑杰作里，几乎所有墙面都经过了推拉捏挤变形.

在西班牙的毕尔巴鄂市，内尔维翁河畔有一块三角形地[船坞旧



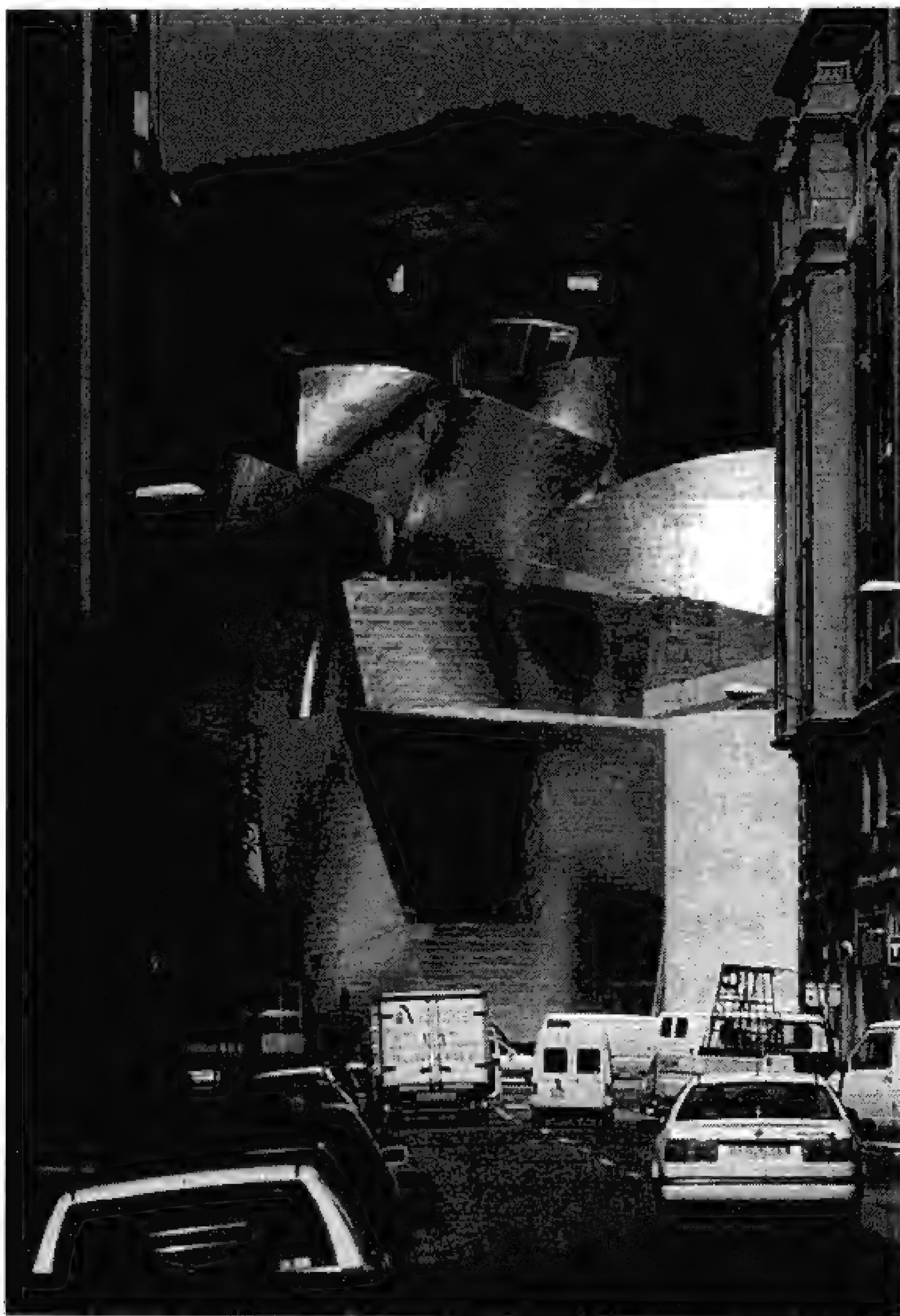
河边馆景.沿河步行道和水上公园.D.希尔德摄影,古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆许可.© SRGH,纽约,1997.

址],盖里设计的毕尔巴鄂分馆就建在这里,建筑物外形与周围环境和谐一致,妙趣天成.古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆令人肃然起敬.它的外观立刻引起我们的注意.确实,那一气呵成的奇形怪状,身披石灰石外衣,头戴钛金属屋面(叫做金属花),曲线复杂而优美,叫人怎能不注目凝视?这是一种视觉享受啊!

在实现这种结构的过程中,现代计算机技术发挥了关键作用.有一种现代三维模型生产设备,叫做卡夏,是在航天工业里为了制作曲面而发展起来的,盖里用它来探索他的特种材料曲面的几何形状,并且修改参数,使这种形状能实际制作出来.模型曲面的各点,利用一种特别的臂状数码工具画出.建筑师将信息输入卡夏,就能探索曲面形状,求出为了保证曲面存在而应满足的几何关系,并且保存下来.卡夏控制一台磨削机,雕刻出大楼形状的精密模型,保持三维控制,以便安排建楼所需各种材料参考.盖里指出,这种新技术"提供了一条途径,使我能完成

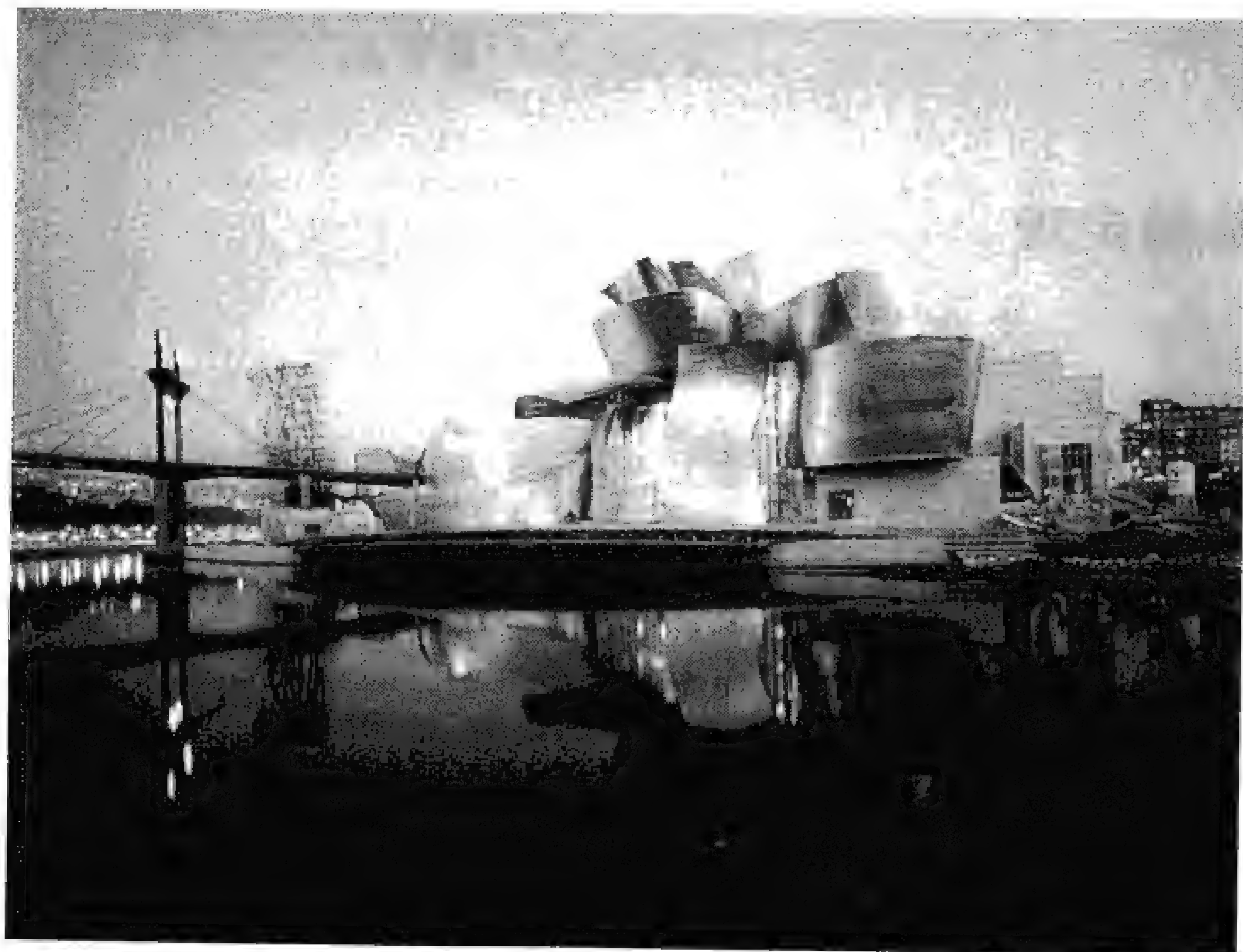
全部工艺. 过去，在我的草图与最终的大楼之间，隔了许多层次，总担心设计方案在变为施工人员行动之前，会不会有所遗漏. 就好像我过去说的是外国话，而现在，突然之间，施工人员全听懂我的话了. 在这里，计算机通人性，它是一名翻译."

美术馆的外形如此复杂，其实它的内部相对说来简单而又光滑. 室



D. 希尔德摄影，古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆许可.
© SRGH，纽约，1997.

内有传统大小的画廊，还有一个大厅（最大尺寸长 450 英尺[约 137 米]，宽 80 英尺[约 24 米]）. 厅内没有柱子遮挡视线. 围绕着高度为 165 英尺[约 50 米]的中庭，除去三层画廊空间外，还有礼堂、饭店、咖啡馆，沐浴着来自金属花塔的自然光线.



D. 希尔德摄影，古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆许可.
© SRGH，纽约，1997.

古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆远远不止是一个美术馆. 它将现代美术、技术和数学融成了一体.

……"直角三角形的斜边的平方等于另两边的平方和",这个定理至今明媚动人,就像当初毕达哥拉斯发现它的那天一样.

——C. 道奇森(L. 卡罗尔)[C. Dodgson,英国数学家,1832—1898 年,童话小说《爱丽斯漫游奇境》的作者.]

勾股定理

——文化遗产

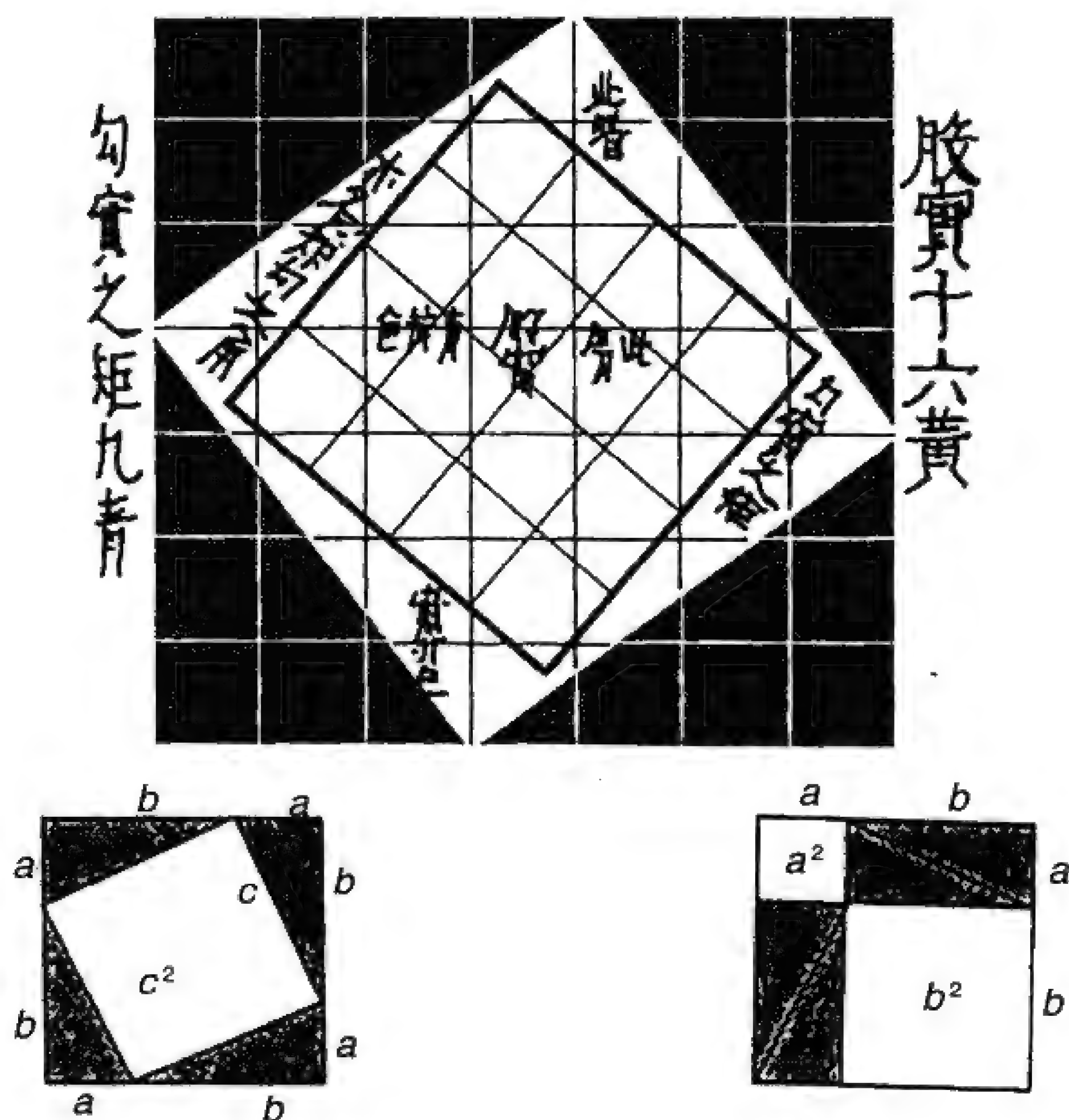
勾股定理的足迹,在大地上一遍又一遍地出现,跨越许多世纪,踏遍无数地方,在各种不同文化里被人们应用. 我们有很多人听说过它. 有些人在几何课里学过它的证法. 而且,我们有少数人还自己想出证明它的方法. 这件数学瑰宝问世的确切时间还不清楚. 直角三角形的三边总是通过一个公式互相联系,并且对于某些边长数值的三角形一定包含直角,这样的数学观念,早在几千年前已被发现——或许大致在巴比伦人的时代. 我们知道,巴比伦人已经熟悉这个定理和一些勾股数组[1],因为他们在泥板上用楔形文字记录了勾股问题和勾股数表[2]. 埃及人为了建筑需要,用拉直的绳子,按照勾股数组的三段长度,结成三角形,来产生直角. 虽然,这个定理在被证明之前,它的观念已在远古世界回旋长达数世纪之久[3],但却未能前进一

[1] 勾股数是满足方程 $a^2+b^2=c^2$ 的一组三个正整数 a、b 和 c. 例如,5、12 和 13 是一组勾股数. 以这样一组三个数为边长的三角形是直角三角形.

[2] B. L. van der Waerden, *Science Awokening*. [也可参考 M. 克莱因,《古今数学思想》,第一册,上海科学技术出版社,1979 年第一版,第 10 页.]

[3] 出现勾股定理迹象的时间,可以追溯到汉谟拉比时代的巴比伦人,比毕达哥拉斯早一千年.

步——抽象、推广和证明. 首先证明它的，大概是公元前 540 年左右毕达哥拉斯学派的一位成员，所以它被叫做“毕达哥拉斯定理”[在中国通常叫做“勾股定理”].



上面这幅说明勾股定理的图形取自中国书《周髀算经》(成书时间说法不一，大致在公元前 1200 年至公元 100 年之间). 观察图中各小块，将它们重排位置，就证明了勾股定理的关系式 $a^2+b^2=c^2$.

勾股定理被证明了，但是它的故事却没有结束. 或许，在这么多世纪内，有这么多不同国家不同文化的人，对同一个定理百证不厌的，仅此一例，别无其他. 现有证法中，最早的是欧几里得《几何原本》命题 74. 欧几里得也证明了这个定理的逆定理. 这个定理的另外一

些熟知证法的作者是：

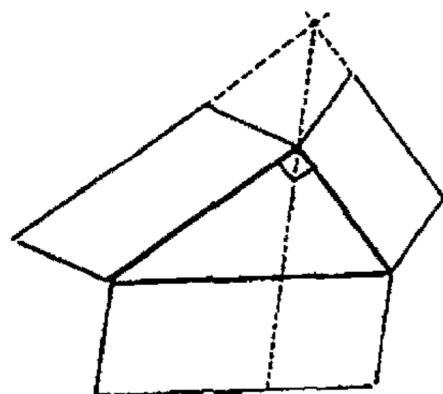
• O. 伯恩（O. Byrne，1810—1880 年），他的证明是欧几里得证法的彩色版.

• [美国的]J. 加菲尔德总统（J. Garfield，1831—1881 年）.

• 印度学者婆什迦罗（Bhāskara），约公元 1150 年，证明方法写在他的书《Vijaganita》里，由一系列图形组成.

• 达·芬奇（1452—1519 年）.

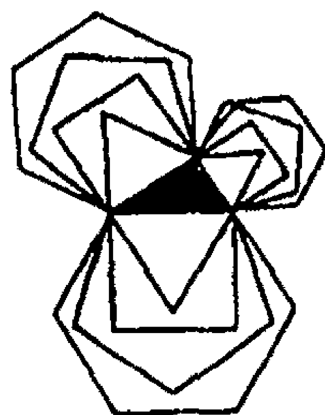
• 一位不知姓名的中国学者. 他的证法记载在《周髀算经》书中，成书年代不详，大约在公元前 1200 年到公元 100 年之间.



这个定理也产生了下面一些变化：

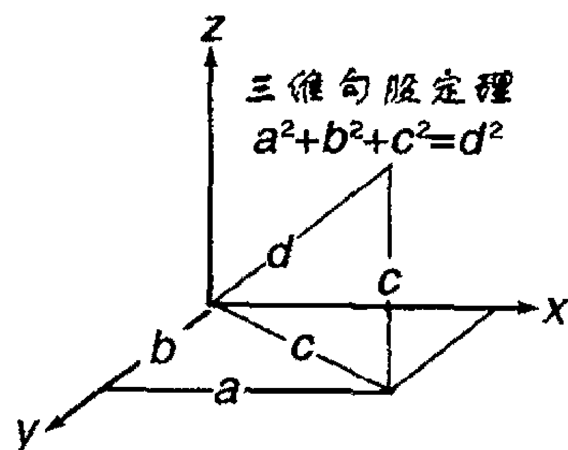
——古希腊数学家帕普斯（Pappus）证明了一个定理，处理在直角三角形各边上所作的平行四边形的面积.

——如果在直角三角形的各条边上作三个彼此相似的图形，那么两条直角边上图形的面积之和等于斜边上图形的面积.



勾股定理的数学观念既有用，又有效，越过许多世纪，在众多数学领域中留下了痕迹. 请注意：

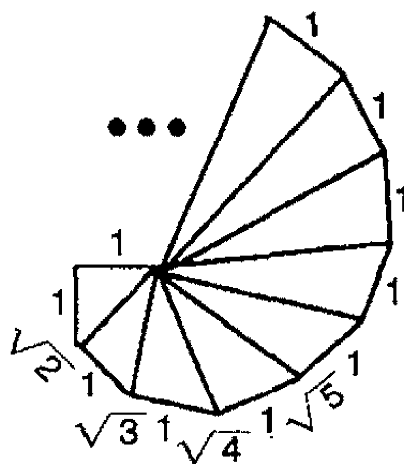
• 虽然这个定理原先是在一个平面上形成的，但是它不限于二维情形. 它提供了一种确定两点之间距离的方法，这两点可以在一个平面里，也可以在[三维]空间里，还可以在更高维的空间里，一句话，在 n 维空间里.



• 它可以用来证明两数平方和的公式.

- 它藏身在一个熟知的三角公式里：$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.
- 它能产生无理数[4].
- 它甚至还能推广到非欧几何里！

这个定理的有用性和重要性将会保持永恒！



〔4〕作一个正方形，使它的边长是1个单位，那么从勾股定理得出，它的对角线长是$\sqrt{2}$. 这个事实被讽刺说，勾股定理打垮了毕达哥拉斯学派关于整数统治宇宙的神秘观点. 事实上，据说毕达哥拉斯学派是希望保守无理数秘密的.

自然是什么？“全无”与“无穷多”相关，“全部”与“全无”相关，而自然则是“全无一物”与“每件事物”的折中.

——B. 帕斯卡[B. Pascal，法国数学家、物理学家，1623—1662 年]

圆环、螺旋线与海豚

——数学与自然

在许多民族的古代故事里，都把海豚描写成慈善的动物，时常引导人们脱离危险，挽救性命. 如今我们知道了它们有一种特别的声纳能力，并且正在努力利用这种原理寻求新的通信方法. 另一种科学研究，是设法评估这些杰出动物的自我意识和智力. 在全世界，无论野生的或饲养的海豚，都能看见它们玩水泡. 其实这并非只是玩玩而已. 许多动物有玩具，但是除了人类之外，还有什么动物能够尝试发展和改进它们的娱乐技巧，来打发时间呢？大家知道，练习帆板运动，如果不懂得关于踏板、帆和风的力学知识、物理知识，帆板就会在水中不断翻倒[帆板成了“翻”板]. 优秀篮球运动员经常练习投篮，计算机游戏爱好者仿佛粘牢在计算机显示器前面. 这种活动方式，原以为只有人类才会采用，但是对海豚智力的总体研究却显示出一些令人惊奇的发现. 这些观测不限于一只特定的海豚，而是广泛考察亚马逊河中的海豚，宽吻海豚，以及太平洋的和大西洋的斑点海豚. 在数学里，我们想到球面、环面、平面螺线和空间螺旋线，是把它们看成复杂的数学形状，不一定当做玩具. 而对于海豚，很明显，它们是一种娱乐形式.

海豚怎样创造这些玩具并且使用它们呢？在[太平洋岛屿上的海港城市]檀香山，从海洋生命公园的水下实验室里观察宽吻海豚，

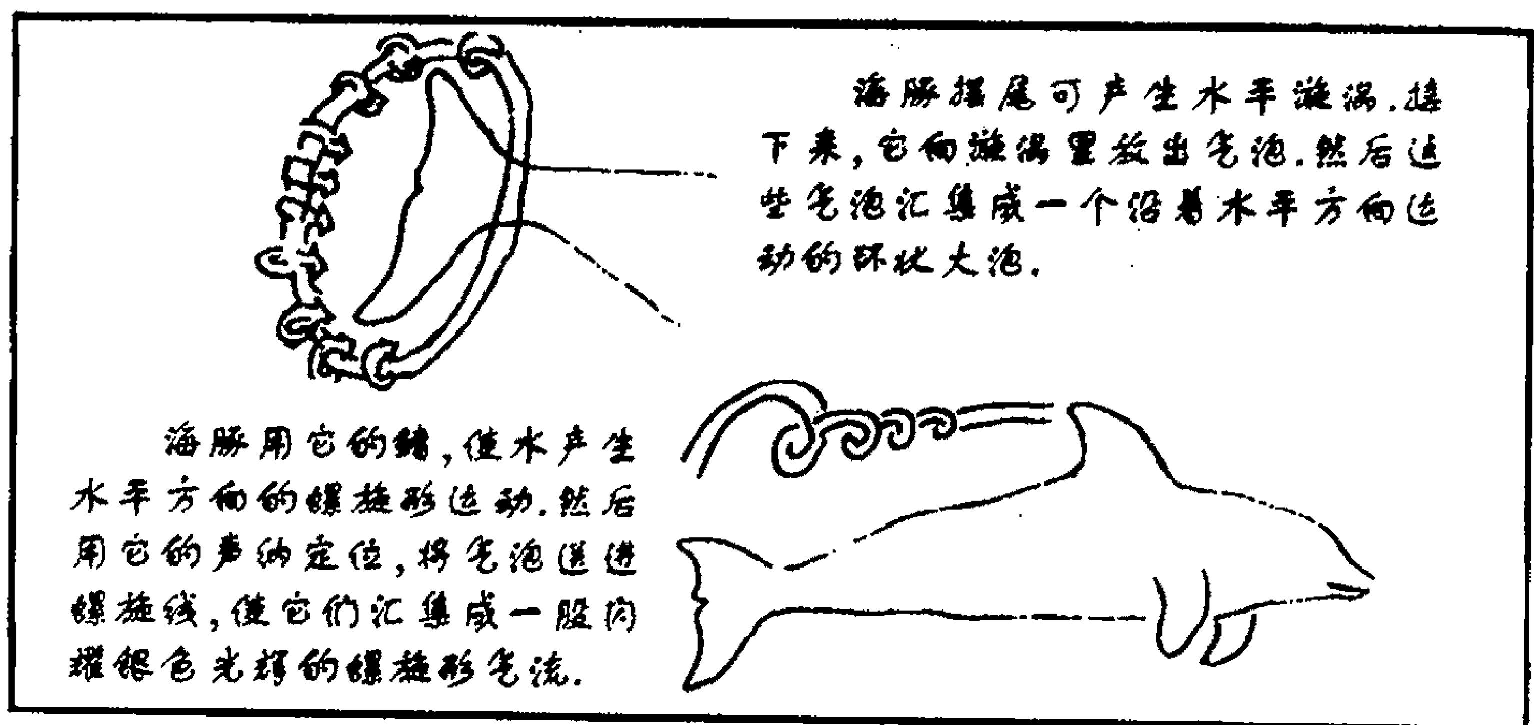


地球信托基金海豚计划允许摄影. 夏威夷,檀香山.

实施一项海豚计划[1],进行关于海豚智力和行为的科学研究. 这里

[1] K. 马滕(K. Marten)是海豚计划研究项目的主任. 这个计划由 D. J. 怀特(D. J. White)在 1985 年发起,在地球信托基金的赞助下,调查和估测海豚智力,作为一种保护措施,以便救助野生海豚. 怀特在 1976 年开创地球信托基金公司,深切希望关于海豚智力的新认识将会激发人类尊重海豚、保护海豚和它们的自然习惯. 更多信息和图片可上网查阅,网址是 http://earthtrust.org,电子信箱是 earthtrust@aloha.net.

有一群海豚,展示了海水泡沫数学的特殊趣味和魅力. 在拓扑学中,球面不能连续变形成为救生圈(环面). 无论怎样将它拉长、压扁和扭曲,它决不会变成一个环面. 但是,在海豚世界里,利用关于水的物理定律,球面却不难变成环面. 环形水泡的玩法,有何特别之处呢? 海豚做这些环状或其他形状的水泡,不是遵照命令,也不为报酬、食品或性行为. 根据观察,它们制造水泡,是为了消遣,并且用来加强它们的通信联络. 据信,一只接受到声纳和水泡讯号的海豚,使用它自己的声纳来帮助译解讯号传达的消息. 此外,海豚计划的观测还发现,某些海豚能够驾驭水泡的物理性质,并会利用漩涡. 因为在水面以



下,水泡下方的海水压强大于上方压强[2],这种压强的差距形成一股向上的力,顶着水泡垂直上升,并且顶破水泡,刺出一个通过球心的穿孔[3],形成环面. 通常会产生一个竖直的漩涡,穿过环面的中心线,将水泡直接送上水面. 但是这些海豚已经理解漩涡如何工作,并且已经想出办法,让环面沿水平方向移动,而不是垂直移动. 此外,通过试验,有些海豚已经学会利用它们的鳍和身体运动,产生水平的漩涡. 利用它们的声纳,它们找到漩涡的眼或中心的精确位置. 这是漩

---

〔2〕水面以下越深,水的压强越大.

〔3〕当球面直径至少有 2cm 时,这种现象就会发生.

涡里压强最低的地方，而且就在这里，海豚制造气泡，跟随漩涡，走一条螺旋形路线，这些气泡汇集起来，形成一股螺旋形的气流，沿着水平方向移动. 技艺高超的海豚，造出的泡沫雕塑光滑而又光亮，作为艺术品，使那些新手海豚相形见绌. 另一个吸引人的因素，是海豚的泡沫游戏和实验并非所有海豚天生就会做的. 事实上，在海豚计划的一项研究中，有一群海豚起初不会做水泡环，直到有一只会做的加入其中，才扭转局面. 在这位新客的水环启发之下，共居一池的其他海豚决定学习这种“游戏”. 此外还观察到，海豚们互教互学，交流如何产生各种不同形状的水泡. 泡沫雕塑不是侥幸得来，而要花费时间、耐性和灵巧，精通技艺，发挥想象力，创造新形态，成为一种动力学的艺术和科学，令人回味.

数学天才和艺术天才互相联系.

——G. 米塔-列夫勒[G. Mittag-Leffler, 瑞典数学家, 1846—1927 年]

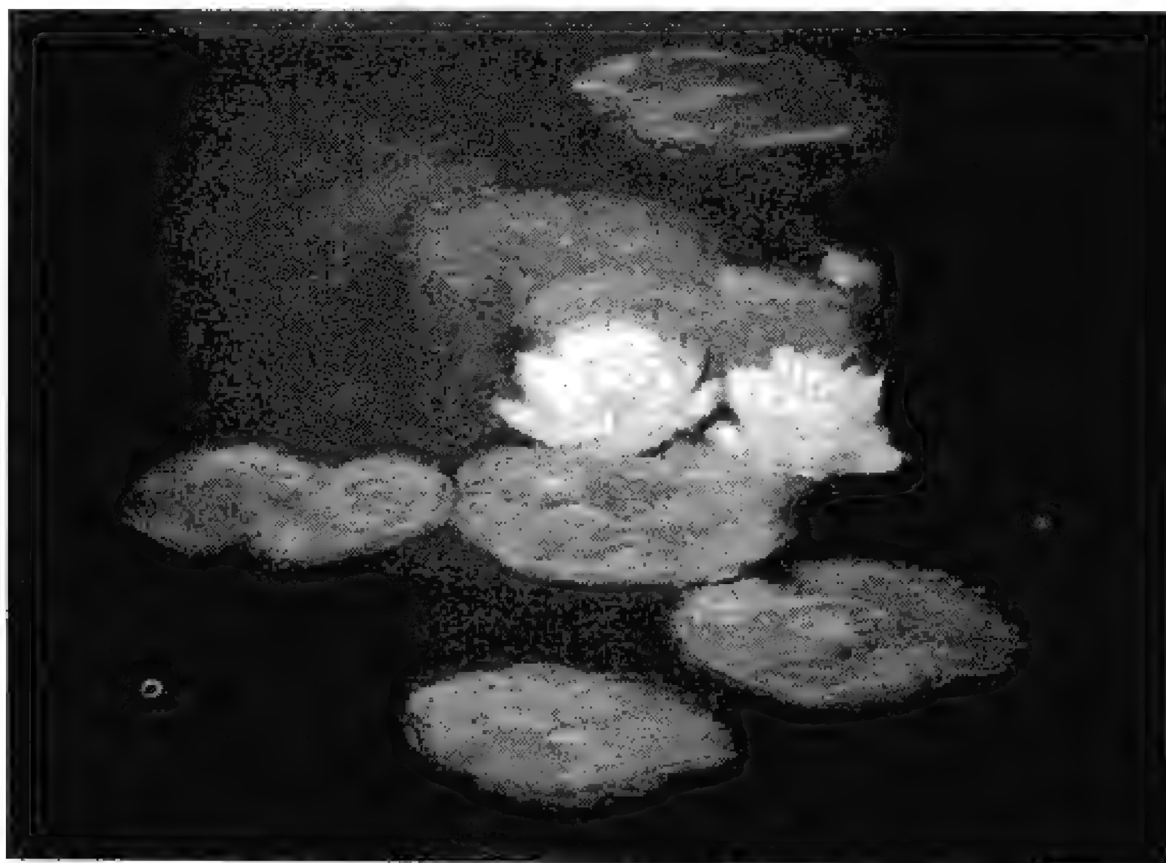
莫奈的艺术

有些画家的作品使人想起数学，因为他们构思时，心里想着数学. 在这些画家里面，我们可以看到——M. C. 埃歇(M. C. Escher)的《变形》，整幅画面由许多逐步变形的小块镶嵌而成；达·芬奇的马，依赖于数学比例；野口勇的《红色立方体》，以数学的对象作为它的模型. 许多画家的作品，曾经或正在受到数学观念和他们时代的技术的影响. 文艺复兴画家们密切关注数学，吸取来自射影几何学的观念，



著名的吉瓦尼日本式小桥

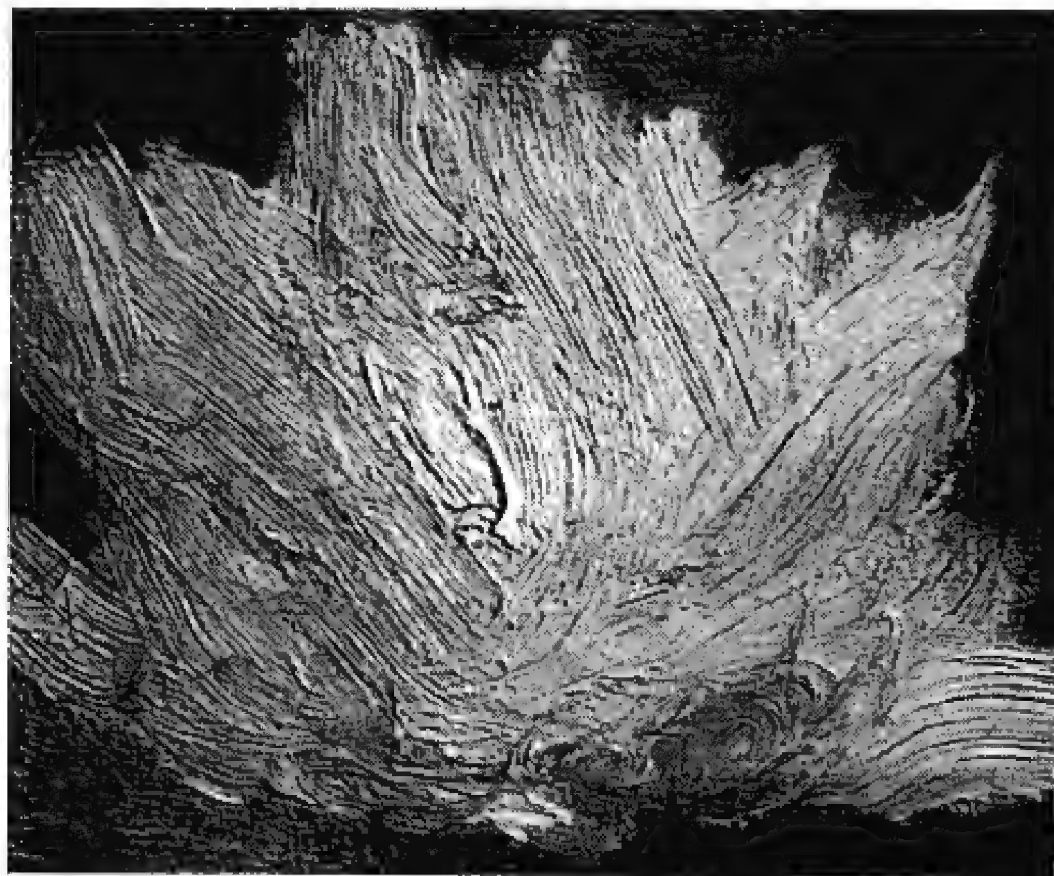
增加画面的真实感和深度感. 他们甚至发展工具来提高他们获取正确透视的能力，例如利用达·芬奇的透视图装置，以及 A. 丢勒(A. Dürer)的投影取景器. 立体主义画家，如 P. 毕加索和 M. 杜尚，则利用高维空间和时间作为作品的题材背景. 目前有许多画家在他们的设计中广泛利用计算机，例如 B. 布里斯雷(B. Breasley)、R. D. 雷施(R. D. Resch)、T. 罗宾(T. Robbin)、H. 弗格森(H. Ferguson)的雕塑，以及安野光雄(Mitsumasa Anno)的设计.



莫奈《睡莲》组画之一的特写

大多数画家在构思作品时不考虑数学. 数学无法深入到他们的心中. 但是我们可以分析、寻找和发现在他们许多作品里出现的数学观念. C. 莫奈(C. Monet)就是一位这样的画家. 在他画的吉瓦尼[自家庭院水景花园]的可爱景物中，日本式小桥景后有景，我们被他对色彩、阳光和朦胧笔触的巧妙运用所吸引，因而虽然目光离开油画，却感到画中睡莲清晰可见. 当我们观赏他的油画时，原以为远离数学，但在回味时，却发现在他那具有革命意义的画中隐含了数学观念. 他是最先将时间元素揉进画中的画家之一. 在欧几里得几何学的三维参数之外，莫奈在他的许多作品里添进了时间维——根据时间安排的一系列图景. 有时他在不同季节一遍又一遍地画相同的景物，

例如吉瓦尼的日本桥风光．另外一些时间系列画，可以限于一段较小的时间区间——一天．他研究过光线怎样改变景色，例如鲁昂大教堂系列画．一组系列画中的作品，可以看成一个序列的元素．序列由时间决定．莫奈所看见的，决定了序列的基调——由时光流逝引起的若干细节微小变化．莫奈搭起一座展示景物演变的舞台，正如今天的数学和计算机拥有展示分形演化的舞台一样．



莫奈的一幅著名睡莲画的特写

莫奈还以他的作品具有明显印象主义风格而闻名．戴上数学眼镜，会看到印象主义艺术元素的一副新面孔，一个模糊的面孔．在莫奈画的睡莲和日本桥里，或是他画的吉瓦尼私人花园里，都有模糊对象．举例来说，他画的睡莲，走近看去，并不很像．换句话说，这些画中花朵不能在 100％的时间里看成 100％的睡莲，因为视觉结果依赖于怎样去看它们——谁来看，从哪个角度看．因此，数学里的形容词“模糊”，让我们有一种新方法描述印象主义作品．这里所说的“模糊”，与焦点无关，而是由观众的眼睛决定（即相对于观察者而言）．

将这些数学观念应用到莫奈，是否牵强附会？——既然我们正在找寻数学如何描述身边其他现象，为什么不能在这里找寻数学呢？

然而有创造力的原理属于数学. 所以，在一定意义上，我相信抽象思考能抓住真实，正如古人梦想的那样.

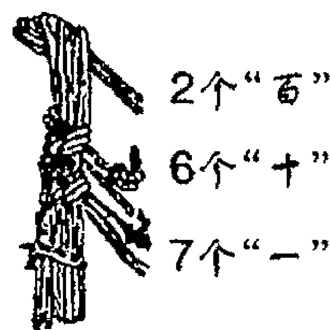
——A. 爱因斯坦［美国物理学家，1879--1955 年］

绳结怎样联结数学

数学和绳结之间的最早联系之一，是用结表示数字. 这样的结出现于《易书》，那是古代中国的一本书，里面讲到幻方，书中用黑色的结［实心圆点“●”］表示偶数，白色的结［空心圆圈“○”］表示奇数. 绳结也是古代难题的一种表达形式，“戈尔地雅斯”难结经常与亚历山大大帝联系在一起［在古代希腊神话中，根据神的旨意，谁能解开“戈尔地雅斯”难结，就可做亚细亚国王，后来这个结被亚历山大大帝解开了］. 下面是另外几个例子，说明绳结与数学的关联：

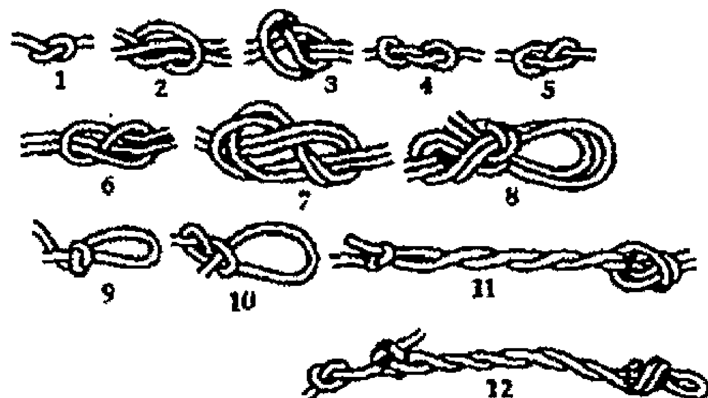
• 记载天数——古代波斯国王大流士在一次远征时，给朝廷留下一根皮带，上面打了 60 个结，表示到他返回之前还有多少天.

• 记录工资——琉球群岛的工人发明了用芦苇编辫打结的记账系统，能表示数位［个位、十位、百位等］.



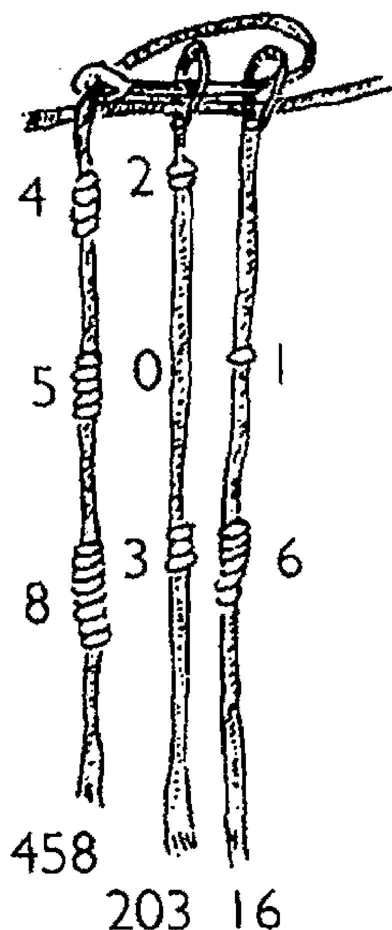
• 计算祈祷——宗教信徒利用绳结或念珠，掌握祈祷的遍数［每遍掐过一珠］.

• 标示产品——在 20 世纪初，德国巴登省的面粉厂主在面粉袋的捆扎绳上打结，起标签作用，利用绳圈说明袋中面粉或食品的品种，又用特定的结显示袋中所装的数量.



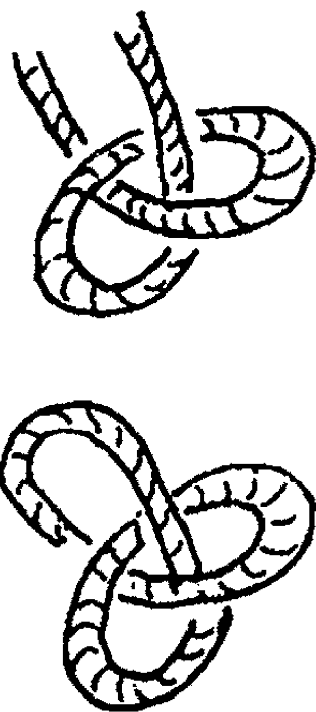
• 储存数据——古代秘鲁的

印加人使用结绳文字(在绳上打结),记录关于农作物产量、纳税和人口的信息,采取十进位制.

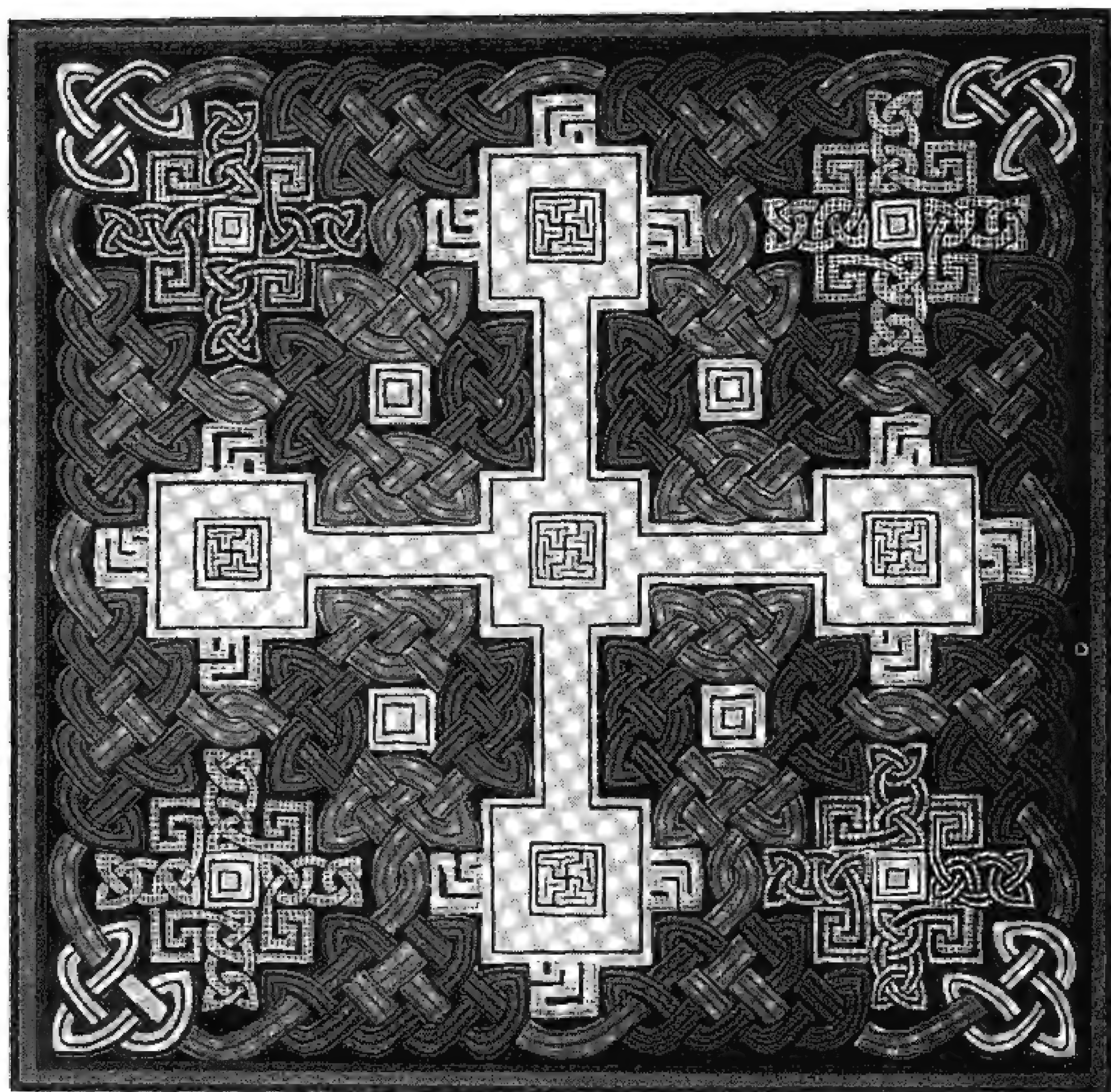


数字1用一个单圈结表示,2表示成"8"字形的结[双圈并排],3表示成三圈并排的结.2至9分别表示为两圈到九圈并排的结.绳子最下面的结是个位,第二排结是十位,最上面是百位,不打结表示零.所以,第一根绳表示458,第二根是203,第三根是16.横贯以上三根绳的那一根绳子表示三数之和,即677.在结绳文字中,也用结来记录非数字信息,就像计算机用二进数字记录文字过程,又像法庭记录员利用符号速记.

在最近一百五十年间,绳结与数学的联系有了一种不同的方式.今天,数学家正在发展绳结的数学,叫做纽结论,是拓扑学的一个分支,研究纽结的具体结构.这些数学上的纽结,不同于生活中的绳结.纽结没有松开的绳端.举例来说,这里画了一个绳结,它没有被归类为纽结论中的一个纽结[因为它的绳子两头各有一个端点,两端分开].但是如果你把绳子两头连接起来,那么它就成为一个纽结,叫做三叶结.如果把传统的8字形绳结的绳子两端连接到一起,它就变成拓扑学中的8字结.



数学家对这样的纽结做些什么事情呢? 首先,他们研究纽结的特征、模型,并且尝试将它们分类.在拓扑学中,纽结被定义为三维空间里的一个封闭回路.拓扑学里的对象,大小、形状和空间位置都不重要.此外,纽结有没有拉紧,也无所谓.将一个



自古以来,纽结就被用于装饰设计.这些设计使我们饶有兴趣地跟随纽结,沿着迷宫似的路径转来转去.这幅塞尔特设计是诺森伯兰僧侣在公元700年左右画的.

纽结(拓扑对象)以各种方式到处[连续]变动时,有一些在变动下保持不变的性质(叫做不变量),可以用来将纽结分类,并且作为识别这种纽结的特征.例如,有一种性质,叫做纽结的交叉数,它给每个纽结指定一个数,当这纽结在它自己的最简形式下(没有多余扭曲),这个数指明了纽结自相交叉的次数.不同纽结的交叉数可能相等,所以为了区别不同纽结,需要有其他途径.事实上,有一些代数多项式(1928

年的亚历山大多项式，1984 年的钟斯多项式[1]，也被用来描述纽结了[2]. 关于纽结的其他观念，数学家定义了纽结的加法，零纽结，素纽结，等等. 换句话说，纽结已经从字面上变成数学对象的模样.

这些纽结如何应用? 正如这许多数学观念的形成一样，它们的应用有一个逐渐演变的过程. 现今纽结论已被用在：

- 遗传学——生物学家和数学家联手，探究哪一类纽结能让 DNA 很容易复制.
- 分子科学——纽结论与统计力学协力，研究液体和气体的行为.
- 物理学，特别是拓扑量子场论——纽结构形可用来描述可能发生的粒子之间不同的相互作用. 此外，物理学家正在探究超弦，嵌入在高维空间里的超微纽结可能回答宇宙的物质和能量的结构.
- 化学——通过观察原子涡流管的不同纽结，可利用纽结区别化学元素.

用数学眼光对纽结考察得越深入，就会越多地发现，它们联结着世界和人生的许多方面. 或许，正如人类许多世纪以来将纽结应用于计数、会计、艺术、消遣、防护，大自然在它的作品中是否也依靠纽结呢?

---

[1] 以发现这些多项式的数学家 J. W. 亚历山大(J. W. Alexander)和 V. 钟斯(V. Jones)命名. 1990 年，在莫斯科，数学家 V. 华西里也夫(V. Vassiliev)提出了一种方法，用来计算纽结的数字不变量，叫做图，后来发现与纽结多项式有关. 这些图为纽结分类提供了新的见解.

[2] x^2-x+1 是三叶结的亚历山大多项式.

我们所知道的并不很多．我们不知道的却无边无际．

——拉普拉斯［法国数学家、天文学家，1749－1827年］

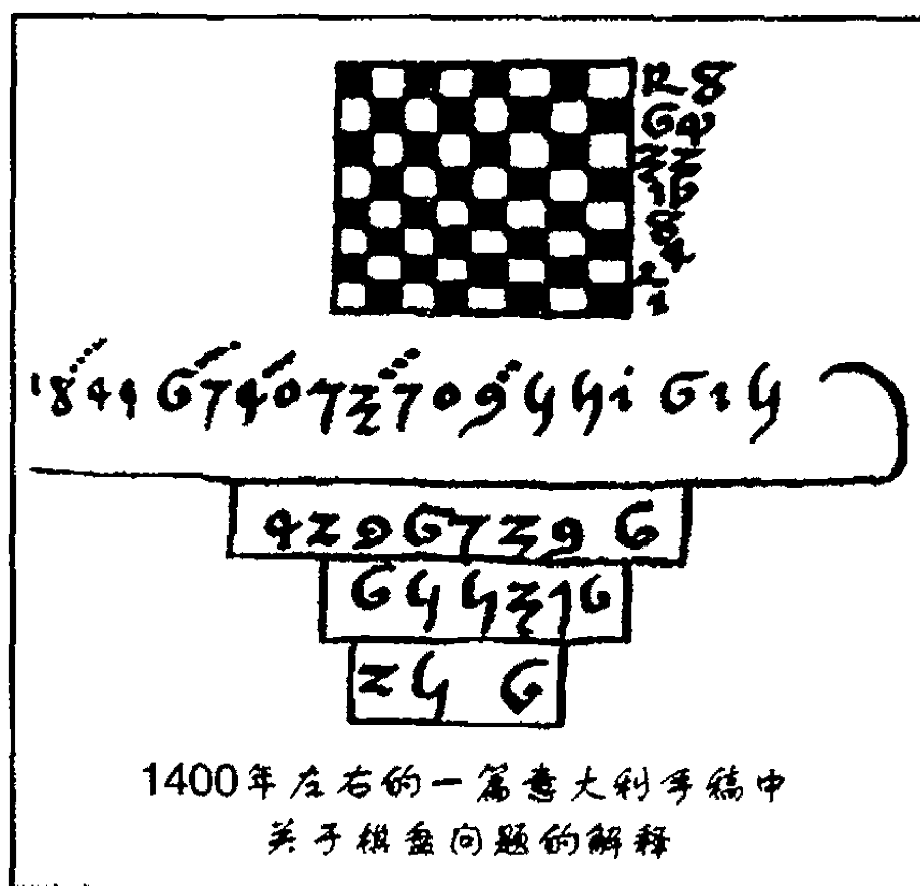
中国剩余定理

问题及其解法是数学的关键．它们激起想法，锻炼头脑．追溯到最早的远古记录，我们找到——兰德纸草书中的埃及问题，写在泥版上的巴比伦问题，希腊人的三个著名难题和许多其他问题，例如梅特

不知其數三三數之賸二
荅曰二十三
曰三三數之賸二置一百
賸三置六十三七七數之
得二百三十三以二百一
三三數之賸一則置七十
則置二十一七七數之
百六以上以一百五減之

一个余数问题的阶段，其中的数字是用汉字写出的

鲁道勒斯(Metrodorus)的趣题(约公元前500年),来自印度、中国和日本的许多问题,约克市阿尔昆的古代问题集(Propositiones ad acuendos juvenes,其中有为查理曼大帝提供的娱乐问题),欧洲中世纪关于棋盘、遗产、追击、贸易等等问题的珍贵藏品.这份清单还可以继续往下写,很长很长.这些问题,大部分以不同方式走进了我们现在的教科书,而且有许多已经折磨数学家长达数世纪之久,例如费马大定理的证明.



1400年左右的一篇意大利手稿中关于棋盘问题的解释

一个来自东方的迷人问题是

求一个数,使它被3除余1,被5除余4,被7除余2.

与此类似的余数问题已出现在中国数学家和哲学家孙子的书中.他的书《孙子算经》是在公元200年左右写的.比萨的里昂那多(Leonardo,约1170—1250年),更常用的名字是斐波那契,在他的书《算盘书》中,也提出了一个这样的问题.现今把这样的问题归类到中国剩余定理名下,出现在名为《数论》的数学领域中.

斐波那契介绍这个问题时,本来是作为一个室内游戏,其中一组除数不必改变,但是余数在游戏中发生变化[因而求得的原数随之改变].除数可以改变,而且你想要多少,就能用多少.不过,几个除数一定要互素.

这个问题的策略是什么?图中那几行中文数字揭示了什么想法?

在第 61 页的表中，将左边第一列中的各数分别除以表格顶端的各个除数，得到的余数对应地顺次写在除数下方. 仔细观察，我们注意到，没有两组余数相同，这是因为我们用了互素的除数[1]. 开头的 105 个数不会有重复(3・5・7=105). 到了数 106，表格就出现重复了[2]. 孙子在他的书里利用了这种循环重复.

余数 / 除数 / 被除数	3	5	7
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	0	3	3
4	1	4	4
5	2	0	5
6	0	1	6
7	1	2	0
8	2	3	1
9	0	4	2
10	1	0	3
11	2	1	4
12	0	2	5
13	1	3	6

怎样解这个问题？

回忆本题，已知余数是：

被 3 除余 1，被 5 除余 4，被 7 除余 2.

我们正在找寻一个数，设它是 n，使它分别被 3、5 和 7 除，得到这

[1] 它们除去 1 和 −1 之外，没有其他公约数. 例如，5 与 12 互素.

[2] 注意，在除数 3 下面的一列，顺次重复数字 0、1、2；在 5 下面的一列重复 0、1、2、3、4；而 7 的一列重复 0、1、2、3、4、5、6. 此外，在第 105 行以后，行开始重复.

些余数.有一种求法,是将表往下延长,直到在一行里出现 1、2、4.另一种方法是考虑另外一个数,把它记为

$$m=1(70)+4(21)+2(15).$$

70、21 和 15 是从哪里来的?对于除数 3,我们取另外两个除数的乘积,即 $5\cdot7=35$,而且找出这个乘积的一个最小的倍数,使它比 3 的倍数大 1.在 3 的倍数中,比 35 小,并且最靠近它的,是 33,但 35 不是比 33 大 1.于是我们尝试 35 的下一个倍数,即 70,碰巧它比 69 大 1,而 69 是 3 的倍数.对于 5,我们取 $3\cdot7=21$,它比 5 的倍数(20)大 1.对于 7,我们取 $3\cdot5=15$,它也是比 7 的倍数(14)大 1.所以,70、21 和 15 分别是除数 3、5 和 7 的专用乘数.每一组除数都有它专用的乘数集合,上面求出的这几个是对于 3、5 和 7 的一组.当你拥有这些乘数的时候,你已经从本质上解决了问题,因为接下来你需要做的全部工作只是计算

$$m=1\cdot(70)+4\cdot(21)+2\cdot(15)=184.$$

现在你将 $m=184$ 除以 $105(=3\cdot5\cdot7)$,求余数,得到 79,这就是我们的解.

如果条件改为除以 3、5 或 7 得到其他任何余数,你同样能应用上面这些乘数.

现在利用数论原理来解释上述过程为什么管用.当 m 被 3 除时,得到余数 1,因为按照我们选取乘数 70、21 和 15 的方法,3 能除尽 $4\cdot21$和 $2\cdot15$,但是不能除尽 $1\cdot70$,除它得到的余数是 1.

5 的情形相仿.5 能除尽 $1\cdot70$ 和 $2\cdot15$,但是用它去除 $4\cdot21$,得到余数 4.

对于 7,我们得到余数 2.

通过考察数论中一个有趣的性质,可以更加明白上面这个过程如何发挥作用.举例来说,我们知道,23 除以 4,得到余数 3.7 除以 4,也得到余数 3.但是(23-7)除以 4,却没有余数[余数为 0],因为两者的

余数相同，在相减时，余数恰好相消. 所以，在我们的问题中，由于 m 和 n 被 3、5 和 7 除，得到的余数都相同，可见 $m-n$ 被 $3 \cdot 5 \cdot 7(=105)$ 去除，余数为 0. 因而

$$\frac{m}{105}=\frac{1 \cdot 70+4 \cdot 21+2 \cdot 15}{105}.$$
$$=\frac{184}{105}$$
$$=1\frac{79}{105},$$

而余数 79 正是我们找寻的数 n.

毫无疑问，数学问题总是使我们烦恼，令我们焦急，让我们高兴.

虽然我们未能看透自然深处的秘密，从而了解现象的真实原因，但是可能碰巧一个想象中的假设足以解释许多现象.

——欧拉[L. Euler，瑞士数学家，1707—1783年]

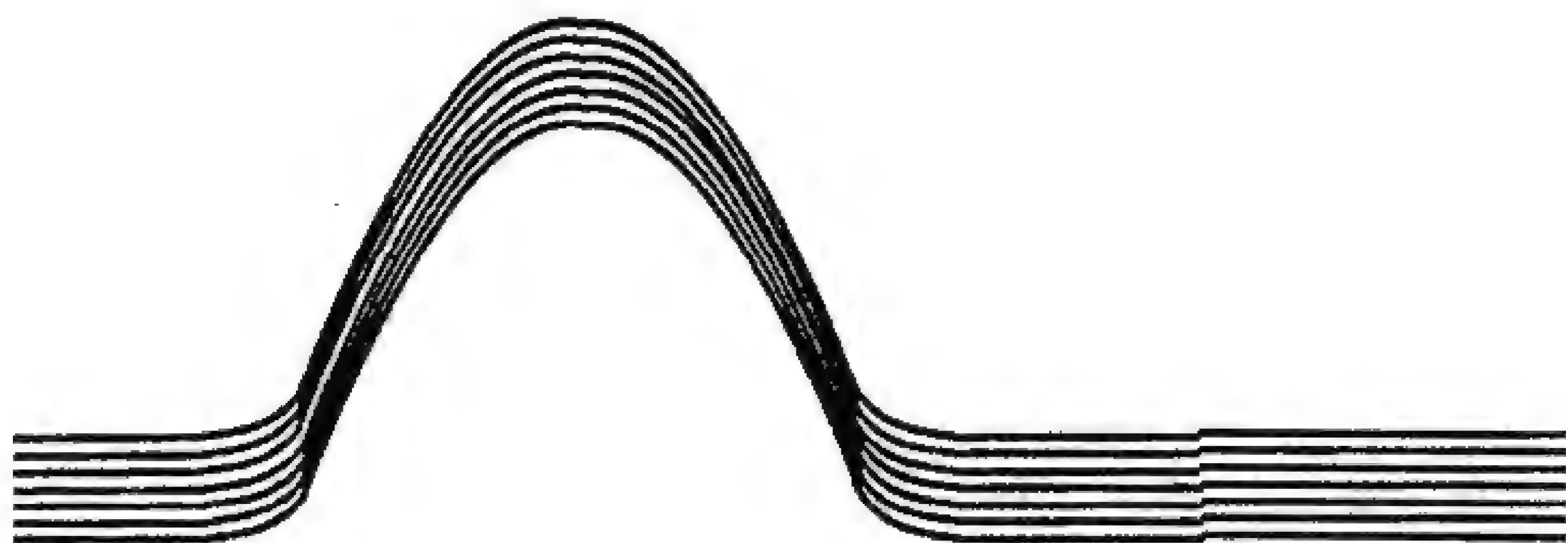
孤立子

欧拉曾在海滩上观看波浪而着迷——凝视波的韵律、流向，试图看出趋势，进而尝试预测，是否会有一个大浪？想象一个永不变形的孤独的波. 一个波在介质里长途跋涉，但却从不改变形状；我行我素，稳步向前. “不可能的，”你说. 多数人相信，这样的波并非真实的，不过是幻影波涛而已. 遇见一个孤立子——在想象中虚构的一种波. 可是，后来科学家们发现，其实自然界里的孤立波，比想象中的那种更为常见.

1834年，当这样一个波首次被工程师J. S. 罗素(J. S. Russell)记录下来的时候，科学家们不以为然，认为他的观测是不可能的. 这位年轻工程师亲眼看见，一条船[在运河中突然停止前进]激起一个不寻常的孤单浪头，沿运河滑行而下. 罗素被完全吸引，骑在马背上，跟随浪头，一路前行，他观察到，浪头始终没有改变形状或速度[直到波在运河转弯处消失]. 他在自己的实验室里工作时，观察到，较高的波，移动也比较快.

在许多年间，科学家们不承认存在这样的波. 直到1895年，数学家D. J. 柯特维希(D. J. Korteweg)和H. 德弗里斯(H. de Vries)认识到，对向力(扩散和压缩)通常使波消失，但也可能实际达到一种平衡，使波保持恒定. 但是他们觉得，如此天然出现的，非常稀有. 在19世纪后期之前，非线性方程已经能够适应描述孤立子[出现了著名的柯特维希—德弗里斯方程，即KdV方程].

1965年，美国普林斯顿的数学家M. 克鲁斯卡尔(M. Kruskal)和





贝尔实验室的N.扎布斯基(N. Zabusky)注意到,当两个不同速度的波相遇而发生碰撞以后,这些波各自保持不变.它们仅仅是互相穿越,没有影响各自的高度或速度.观察到的唯一改变,是相移的微小变化(较快的一个的结束位置稍许提前,较慢的稍许移后).因此,他们把它们叫做孤立子.孤立子在自然界中其实很普通.事实上,它可以存在于水、空气、大地、电磁场等多种媒介中.孤立子是一种复杂系统,它的惊人力量保持完美平衡,使波不会到达绝顶,也不消失.这样的一个波,经常被两个相反的力进行调整——每取消其中一个,另一个随之出局,因而没有单一的力控制和改变波的运动.

哪里能找到自然发生的孤立子呢?

在遗传学中,对孤立子的探索,出现在DNA[脱氧核糖核酸]双螺旋分子自身复制的方式中——分开双螺旋或"拉开拉链",以便自由核

苷酸能附上两支被分开的螺旋线，形成两个新的同样的 DNA 双螺旋. 这种"拉开拉链"和"拉上拉链"的动作，可能产生孤立波！

在分子生物学中，孤立子作用[1]正被考虑用来解释蛋白质在肌肉运动时的作用. 孤立波可能是移动点滴能量的一种有效方法. 在头脑中，孤立子可能提供一种工具，用来使脑细胞外的钠原子(荷电粒子)随着孤立波，在蛋白质里运动.

在宇宙学中，孤立子再次进入图画. 一些科学家把孤子星看成黑洞的可选方案. 戈达德航天中心的邱鸿毅提出一种想法，认为在宇宙大爆炸之后，夸克被俘获，并被挤压在高能空间中的一个坍缩口袋里，因而形成孤子星. 这个孤子星能吸引周围的物质，把它们的质子和中子变成自由夸克，从而让孤子星生长壮大. 另外一些人主张，因为孤子星可以如此庞大，又看不见，或许它们含有科学家正在尝试解释的黑暗物质.

在量子论中，孤立子被看成类似于粒子，因为孤立子可以同时具有波和粒子的性质.

孤立子不但在自然界里被探究，在工业应用中也一样. 因为当两个孤立子彼此遭遇后，它们各自保持原状，所以这些波可能会有一些实际应用，例如，当光线在光纤中传播时，或是在医学的激光中，在指定的距离产生孤立子能量波，因而不需要刺穿健康组织. 在堪培拉，澳大利亚国立大学的 A. 斯奈德(A. Snyder)和他的同事们，正在探索孤立子在光纤中的应用，他们发送长距离光束，装入孤立波. 莱达公司的科学家设计了一种纤维，让孤立子能在长距离上保持他们的最初形状. 在美国罗彻斯特大学，A. 斯滕兹(A. Stentz)证明了，这些脉冲能沿着纤维旅行而不会退化，其速度之快，达到万亿分之一秒，比目前的方法快 100 倍. 数学家 P. 罗泽瑙(P. Rosenau，以色列海法工大)和麦克海曼(Mac Hyman，美国洛塞勒摩斯理论部)正在探究他们所称的致密子(没有尾巴的孤立子)，理论上它们可以装满信息，沿着电脑国际互联网传递.

---

[1] 美国亚利桑那大学的 A. 斯科特(A. Scott)说，孤立子将是一种"非常有效的方法，聚集能量并且将它送到正确位置."见 David H. Freedman, *Lone Wave*, *Discover* magazine, December 1994.

日本大阪大学的研究人员正在完善他们创造的第一个低频率孤立子声波. 他们希望能用这些波来发展一种新的方法,以便经过管道有效地输送热能.

人们期待听到更多的关于这些用非线性数学[2]描写的“幻影”波的消息. 它们可以突然出现在任何一种熟悉的波动里——地震、海浪、无线电波,或者量子物理学和遗传学中各种奇异的波.

〔2〕非线性数学研究由很多变化因素支配的复杂系统(非线性系统). 这些因素处于经常改变和调整的状态. 复杂系统位于混沌和平衡有序状态之间的边缘上,这种平衡依赖于系统自身组织的动力学. 换句话说,它经常在适应和平衡它自己,从而适应变化的因数和产生这些因素的环境. 非线性数学涉及概率、混沌理论、分形、人工智能、模糊逻辑、计算机科学和一些其他数学领域.

每个人谈论天气，但是没有人做任何关于它的事情.

——马克·吐温[Mark Twain，美国作家，1835—1910年]

天气预报的数学

"少云和有雾地区将在中午以前云消雾散；其他地区阳光灿烂，温暖宜人.最高温度华氏67°—71°[约摄氏19°—22°].今夜少云.最低温度华氏47°—52°[约摄氏8°—11°]."

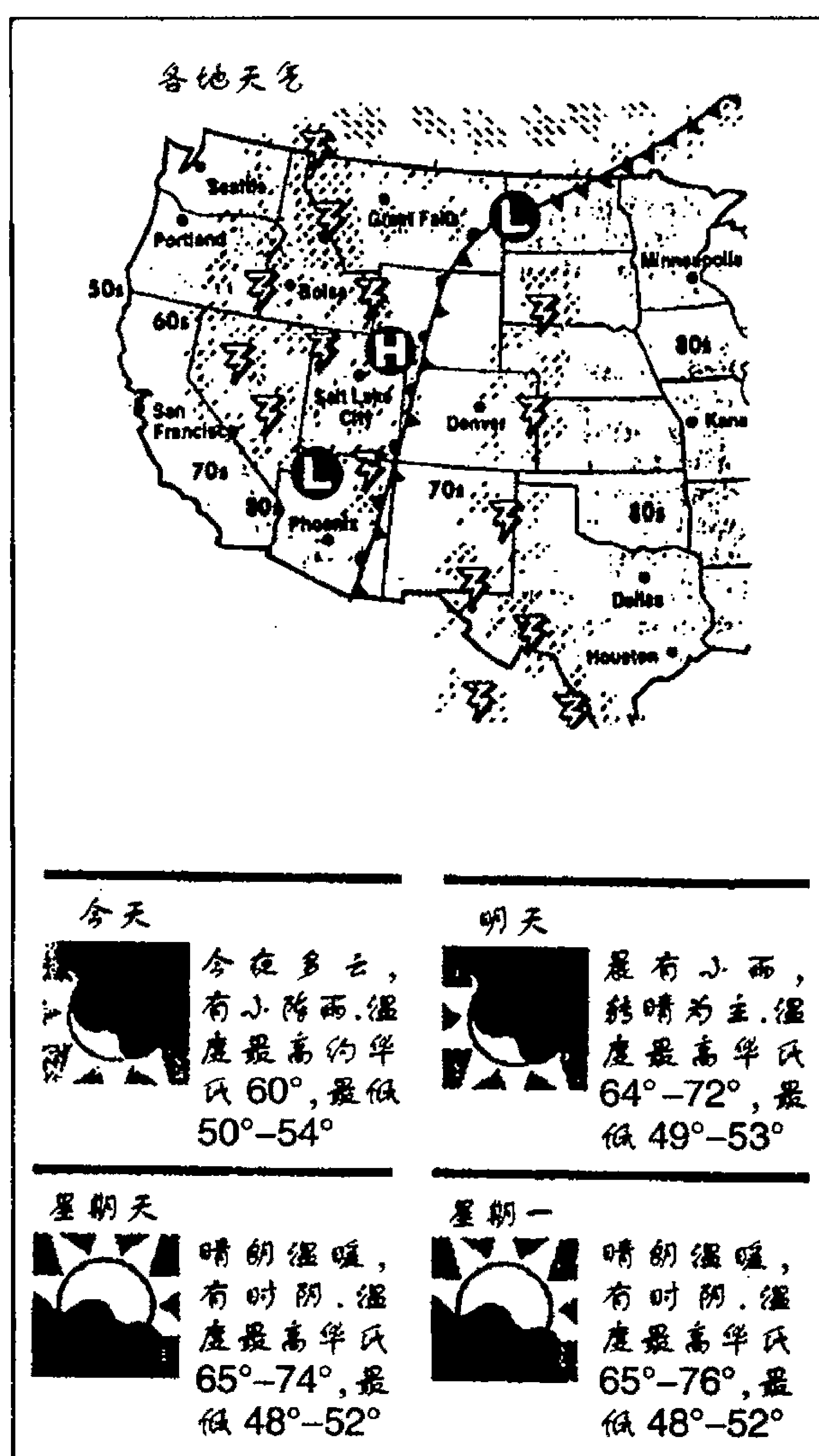
天气从多方面闯进我们的生活，能够影响我们的计划、旅行、工作、心情.天气是一个复杂的系统，影响它的因素很多，有气温、湿度、气压、风、云层流动、大气状况、植物多寡、太阳情形、海洋温度、……此外还有说不完道不尽的不明变化因素，由此可见，为什么每次天气预报只在最近几天时间内比较准确.产生作用的因素是非线性的.它们影响天气预报的可靠性，因为同样一组特定的条件未必带来相同的天气[1].

随着新技术和新工具不断进步，天气预报的科技水平日益发展.如今，天气预报中的可预言事项或不可预言事项，依赖于对大量气象数据的测量和数学处理.目前还不能从物理上探测、记录和输入所有影响天气的数据、差异和变化.因为因素不是线性地作用，所以混沌和复杂性扮演主要角色.未察觉的细微差异，可能引起其他微小变化，从而使天气预报出错，产生天气奇闻.每天的预报，与过去全靠有限多个气象气球和气象站提供数据的时代相比，已有很大改进.今天，采集样本数据的速度突飞猛进，数量迅速增长.雷达系统和气象卫星[2]，配合复杂的数学算法，改善了预报的可信程度.

---

[1] 对于线性系统，同样的特定输入，总是产生相同的输出.

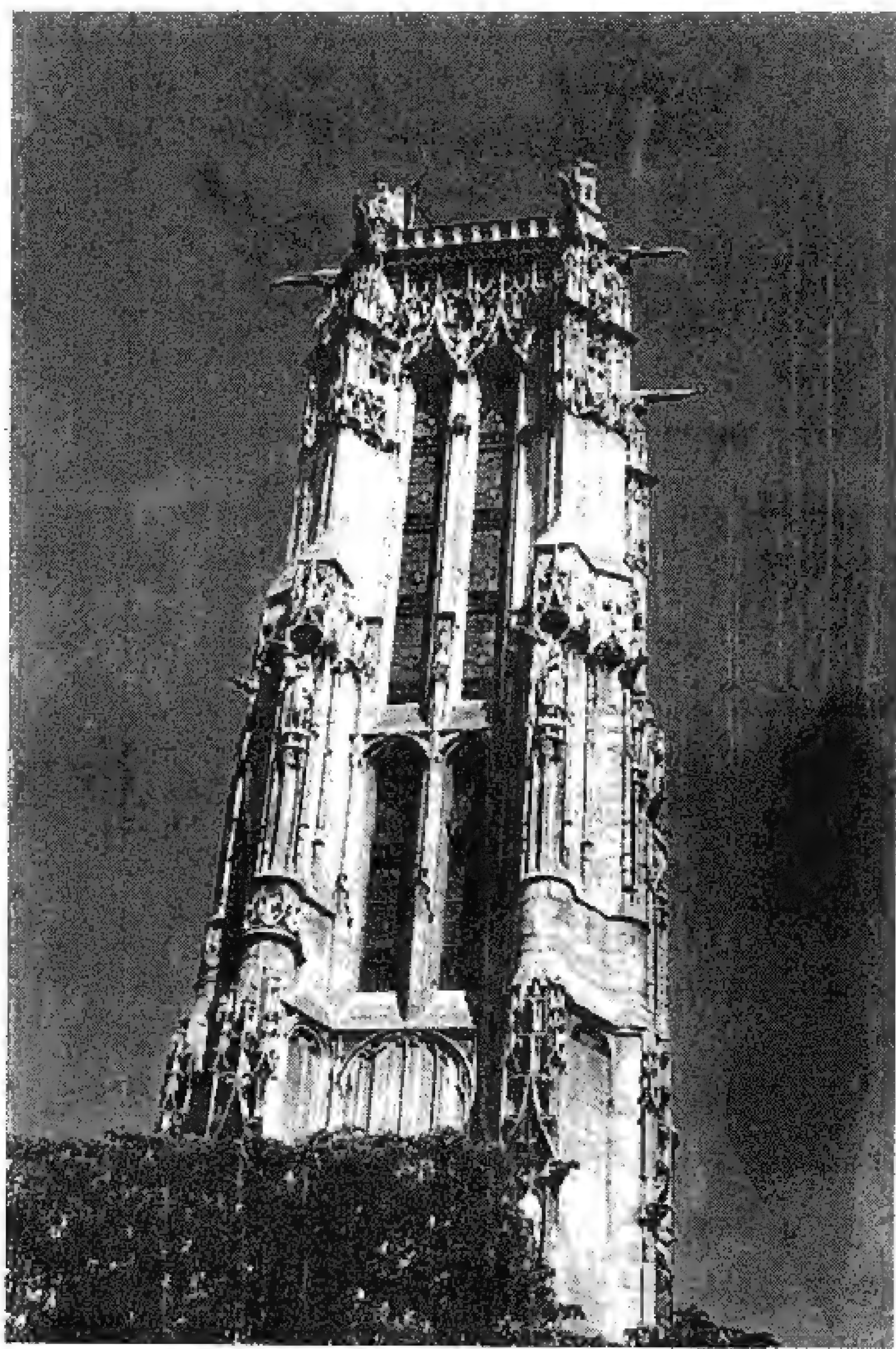
[2] 其中包括一些不同种类的与地球自转同步运行的人造卫星，它们配备了可视红外线旋转扫描辐射大气探测器.



1999 年，在美国威斯康辛大学麦迪逊分校，编制出一种新的计算机程序，具有识别与风暴强度有关的数字模式的能力. 这种程序扫描人造卫星图像，从而测定暴风雨的数量和强度. 除此之外，新的飓风追踪技术也发展起来. 从一组人造卫星（对地球的视点各不相同）产生的图像，汇总为一幅高分辨率图形，从中可以读取飓风信息.

预报如何产生？ 国家气象局收集全球各地的观察数据. 这些数据来自人工观测、气象气球、气象飞机、气象船、气象站和气象卫星. 国家

气象局在超级计算机上运行数字天气预测程序，它把大气划分成三维格点，点数超过 250 000 个. 收集的数据为其中每个点提供了温度值、压强值、湿度值以及风速. 计算机将数据汇总、综合，构作出一个大气模型. 从这些汇总的数据出发，应用一些特定的方程，为格子的每一点预测未来 10 分钟的数值. 重复上述过程[每次前进 10 分钟]，直到 24 小时天气模型描绘成功，就形成一个预报.



1648 年，在法国巴黎圣雅克塔顶上，数学家 B. 帕斯卡用气压计计算空气的重量. 现今这座塔里存放气象设备.

然而，即使利用超级计算机和精细的复杂计算机模型，预报的可信程度，也只有大约几天范围内较好. 对于短期预报和长期预报，都在不断地探索新方法，寻求新改进. 目前的季节预报，主要根据统计过去的天气模式和过去的类似情形，由此得出一个预报，它的准确性至多不超过三个月. 目前正在探究长期预报的新手段，利用一种工具，叫做耦合全球循环模型(GCM). GCM 可以模拟出，大气和海洋水流[3]怎样改变地球周围的热量和湿度. 运用 GCM 的初步工作令人鼓舞[4]，美国国家海洋与大气管理局将 2005 年拟订为目标年，希望能使全年预测一般气候情况的成功率达到 70%[5]. 长期预报是气象报告的一种革命方式，因为它并非只集中关注[一段较短的]特定时间的预测，而是预测一年或更长时间的一般气候情况. 不久以后，每日天气预报的方法会有什么变化呢？为了改进短期预报，将会关注计算机模型的新动力学，并且利用改进以后的复杂性科学，在这种改进中，数学起了关键作用.

---

〔3〕已经发现，某些海洋水流，例如厄尔尼诺(热带太平洋中一种不常见的暖流)和拉尼诺(热带太平洋中一种不常见的寒流)，会影响天气.

〔4〕在过去十年内，进行了借鉴预报，用来测试模型的准确性，而且探索修正它的方法.

〔5〕关于 GCM 的其他情况，可以看 Richard Monasterky, *The Long View of Weather*, Science News, Nov. 20, 1993.

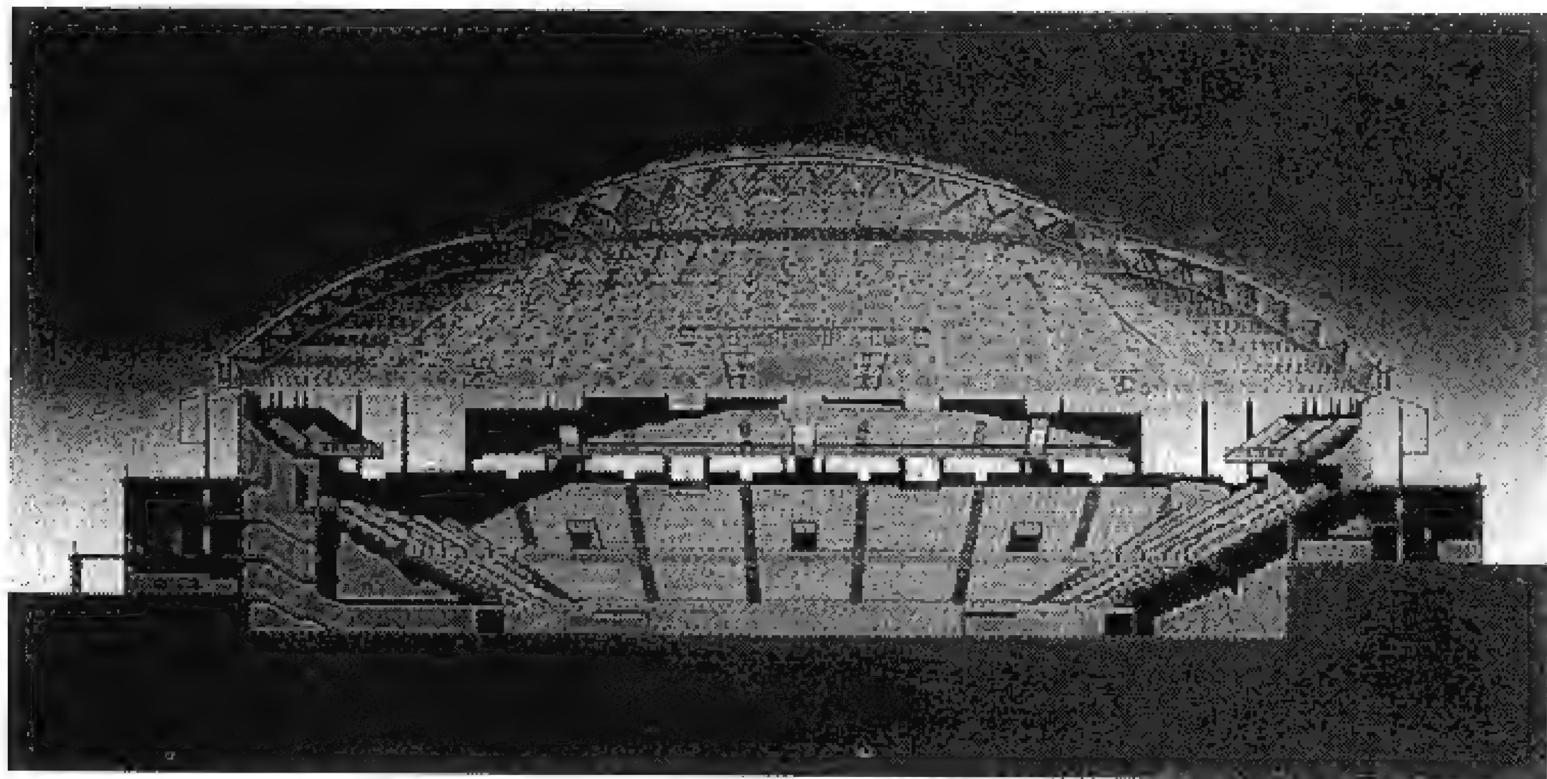
就其创作的内在气质而言，当今世界的大建筑师开始以纯粹数学家的姿态出现.

——J. H. 杰恩斯[J. H. Jeans，英国数学家、物理学家和天文学家，1877—1946 年]

数学与矶崎新的建筑

建筑学中的所有形体，都立足于数学的对象，例如[美国建筑师]B. 富勒(B. Fuller)的测地线拱顶，[古代罗马]巴特农神庙的黄金长方形，埃及的金字塔，或者旧金山圣玛丽大教堂的双曲抛物面. 数学的形体和曲线，在建筑师的设计中，是一些用来砌造楼宇亭台的部件. 而对于[日本现代建筑师]矶崎新(Arata Isozaki)，这些形体也是他用来使他的作品开口讲话的一种语言符号. 正如他指出的，"每一种(结构)必须创造它自己的独立自我象征"[1].

他怎样使他设计的房屋说话？这些房屋讲的是什么话呢？

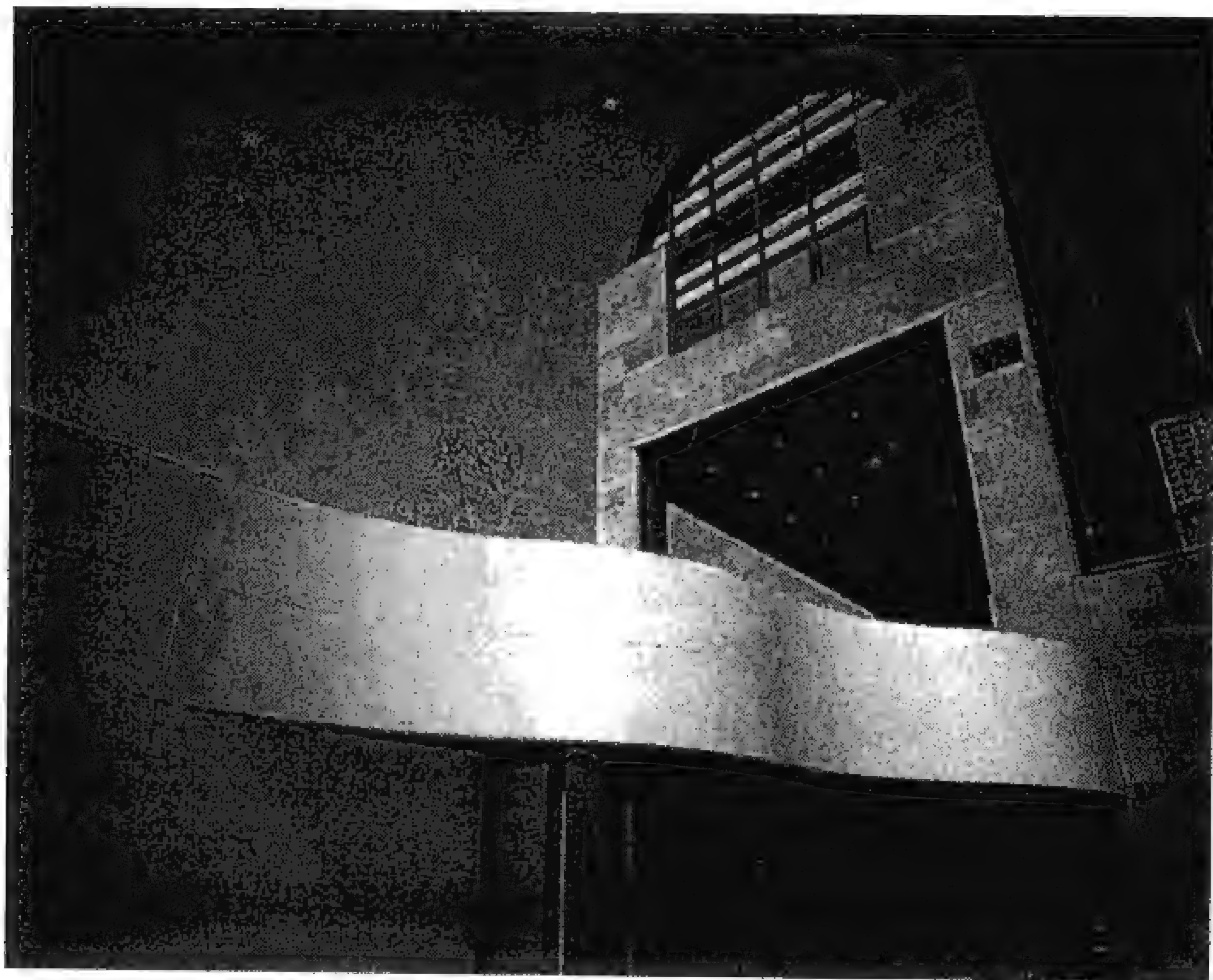


巴塞罗那体育中心的圣乔迪体育场. 矶崎新及其合作者允许摄影.

[1] Arata Isozaki, *Arata Isozaki's Tokyo*, Visà Vis, September 1990.

矶崎新设计他的建筑方案时，在心中将自己当成局外人．他尝试想象并经历每项设计，但不是用建筑师的眼光，而是从局外人角度询问，这个设计传达什么意图？它在说什么？他的每一项设计，本质上是一个主题或一种形象．由于心中有主题，因此他的设计开始具有它自己的个性．每项设计的核心，是他那脱缰野马似的想象——不受传统或潮流束缚，过去的和现在的各种形体、材料和方法，信手拈来，各尽其用．指引他的想象和他的设计主题的，是建筑物将要落脚的环境——周围的房屋、风景，以及空地的生命力．通过浏览几件他的作品，我们对于他的创作过程会有一些了解．

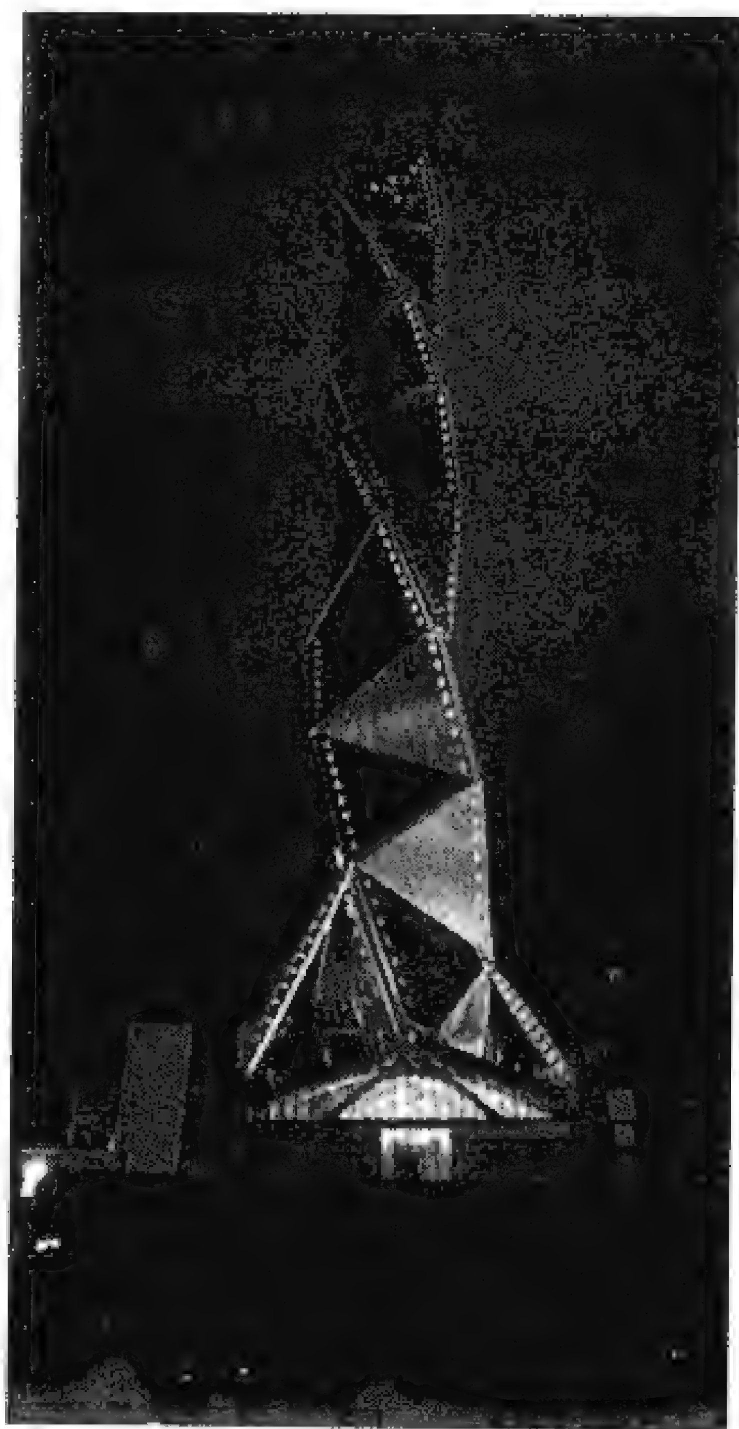
• 考虑他为 1992 年巴塞罗那奥运会主赛场设计的圣乔迪体育场．由于这里山丘起伏，矶崎新最初设想了一个波浪形屋顶，来模仿周围地面景色．但是数学和物理表明，波浪形巨大拱顶不切实际．他



洛杉矶现代美术馆，石元泰博摄影．矶崎新及其合作者同意引用．

的最后设计方案，既反映了周围小山的缓慢倾斜，又包含工程师川口卫(Mamoru Kawaguchi)的一项工程创举.没有按照传统方式设计和建造拱顶，而是首先在体育场地面上装配用铰链连接的三截折叠钢架，跨度为400英尺×350英尺(约122米×107米).花费10天时间，利用水压，将折叠钢架从体育场地面上慢慢升高，逐渐展开拱顶，宛如花朵绽放，直至升到它的预定高度148英尺[约45米]！这时再将拉杆安装到位，保护拱顶.一个难以置信的奇景，出现在人们眼前.

• 对于洛杉矶现代美术馆，小村庄是它的主题.低沉的庭院，是这个"艺术村"的乡村广场或画廊集中地.各种各样的几何形式——曲线、棱锥形天窗、正方体、半圆柱形的拱顶，使这村庄像一尊雕塑，站立在加利福尼亚广场高楼大厦的环抱之中.1986年洛杉矶现代美术馆完工时，评论家J.乔瓦尼尼(J. Giovannini)说："从18世纪法国建筑幻想家以后，没有一位建筑师能将立体几何形体运用得如此清纯，也从未有过他的幽默感."此外，矶崎新还从电影明星获得灵感，创造了他的玛丽莲·梦露式法国曲线，在洛杉矶现代美术馆的建筑物里多处出现.他时常用他的幽默、玩笑或其他个人特点，点缀自己的作品[2].

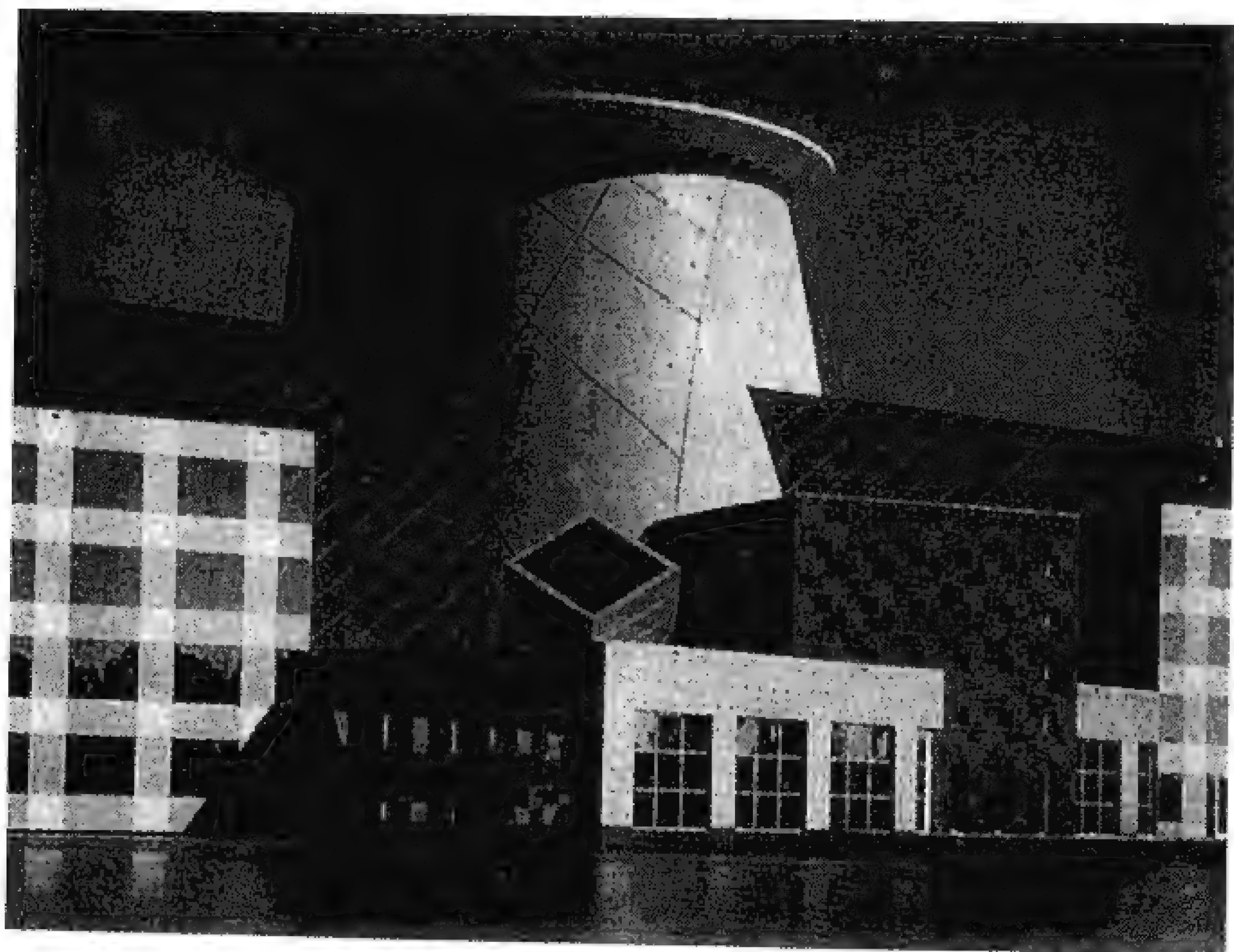


水户艺术塔，石元泰博摄影，矶崎新及其合作者同意引用.

• 重力是水户艺术塔复合形

[2] 例如，在矶崎新设计的不死身乡村俱乐部场馆中，表现出他的奇妙幽默感.他设计了一个问号的形状，借此问道："为什么日本人这样喜欢高尔夫球呢？"

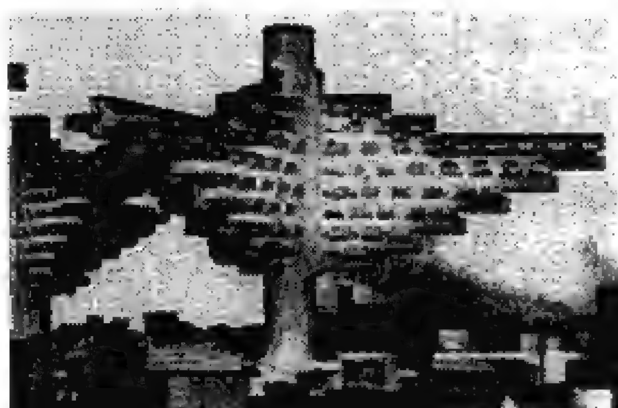
体的主题.虽然这项计划与整个水户相比显得很小,它的特别设计却使它成为一个富有吸引力的文化中心,一个艺术中心.这座建筑物是几何体的多变组合,几何体的位置安排,以及它们外表的石壁,给人以美感.由于艺术能振奋我们的精神,人们被这里的组合形体震撼,它有两处藐视重力,因而象征艺术自由.第一处是"漂浮"石,位于画廊的庭院空地中,看上去就像悬浮在空气里,享受着水的冲淋,游客们来到这里,立刻就被迷住了.第二处是具有象征意义令人屏息仰望的高塔——由四面体层层叠叠堆积而成的一座塔,高达 330 英尺(约 101 米),这些四面体顺次连接,成螺旋形,扶摇直上[看似歪歪扭扭,居然不倒不晃],它们似乎在那里暗自发笑,重力啊重力,你能怎么样呢?



迪斯尼总部大楼.石元泰博摄影.矶崎新及其合作者同意引用.

• 对于迪斯尼总部大楼,时间是它的背景形象.庭院是一个巨人般的日晷,建造在一个巨大的圆台上面,圆台的下底面直径是 120 英尺[约 37 米],高也是 120 英尺.刻度盘在圆台的顶上,指针投在盘内的阴

影，既显示时间，又表明季节．为了进一步突出时间主题，在石阶上刻着一些著名人物关于时间的语录，其中包括爱因斯坦、莎士比亚和唐老鸭．这些建筑物聚集在一起，产生一种动感——圆台看起来似乎被矩形结构分割，立方体形状的天窗与屋顶的交角是变化的，以上两者都暗示着变动，或许是时间的变动．



• 核心连接系统是一个引人入胜的居民住宅城市森林理想计划．住宅的形状应该用地最少，占有的空间却能达到最大．这些独特的几何形状，增强了生活单元的采光，令人回味，可称之为分形建筑．

矶崎新的以上五个建筑设计方案，不过是从他众多出色作品中选取的简短一瞥．矶崎新是当今最善于创新、最富有创造力的建筑师之一．审视他设计过的结构范围，人们无法不注意到，没有挑战，也就不能获取他的想象．他那 35 年以上的事业生涯，将在现代建筑学发展中留下永恒的印象．

……数仅仅是我们心灵的产物.

——K. F. 高斯[德国数学家、天文学家和物理学家,1777—1855 年]

模糊数

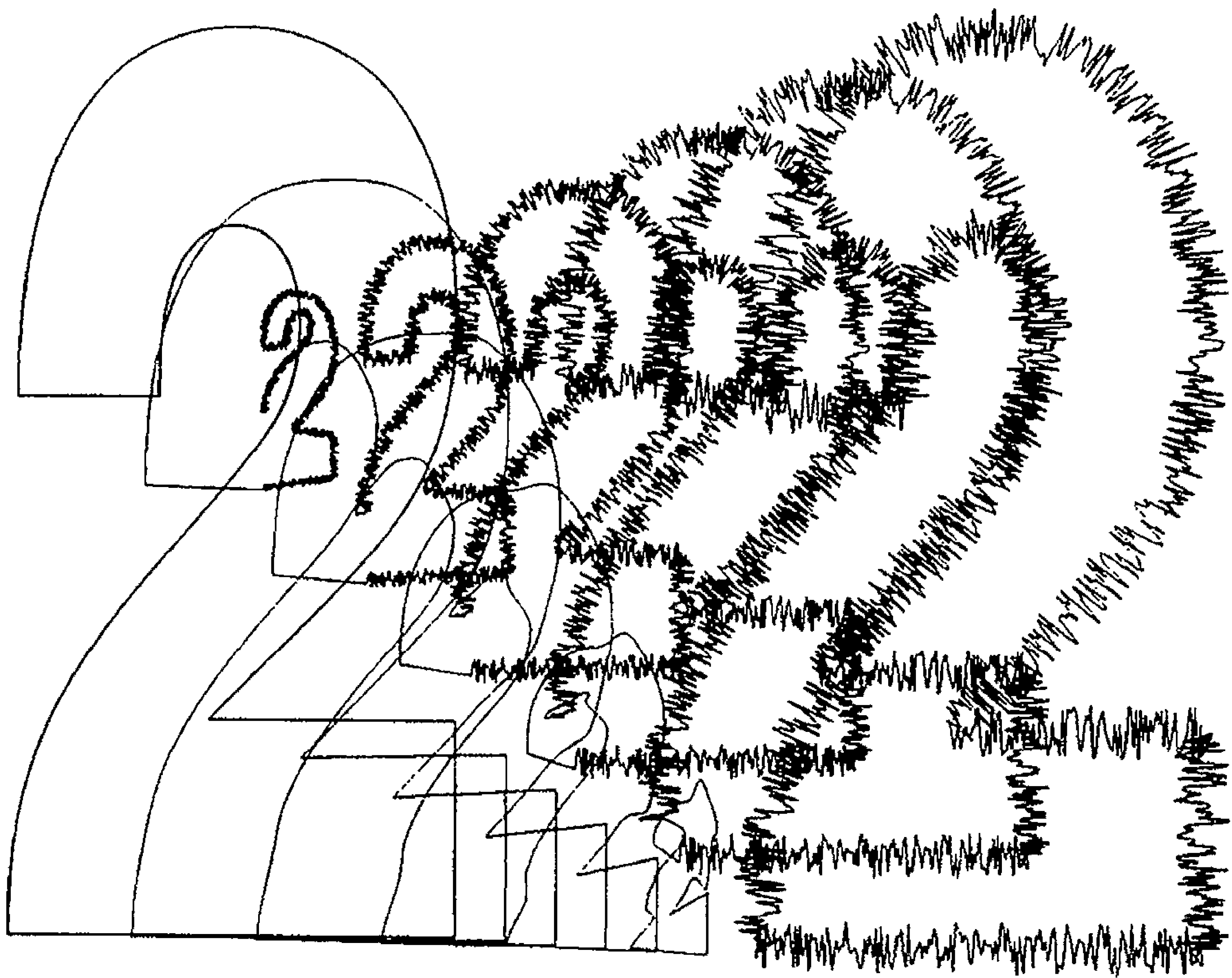
术语模糊数听起来像一个矛盾的说法. 数不是被认为精确的吗? 难道 5 个某种东西并非永远精确地是五个? 过去,精密度不是很重要. 超过 2 的数目,常被表达成"很少几个"、"许多"、"若干"之类的词语. 自从人最初开始用数计算物品的多少,数就在不断发展中. 看来总是从一个数集引出另一个数集,从计算个数产生了零和自然数,再发展到整数,到有理数,到无理数,到实数,到复数. 它们还有一些特殊的子集,例如偶数、奇数、负数、亲和数、垛积数、超越数,等等. 在世界上,"模糊"这个词能与数有关吗? 模糊数是否是含糊不清的数? 掉进灰暗地方的数? 模糊数与模糊集合有关[1],模糊集合与模糊逻辑有关,而模糊逻辑则可能会使计算机如何工作和运算解题产生革命性的突飞猛进.

模糊集合或模糊子集是一群对象. 模糊数是在实数轴上的数的模糊子集. 究竟什么元素属于这些集合,并不完全清楚. 甚至元素是否属于一个模糊集合,也没有成规可循. 举个例子,说到集合{所有的金发碧眼女人},其中是否包括原先金发碧眼后来头发变白的女人? 只要出生时金发碧眼就行? 金发的色调范围如何? 头发既有金色又有褐色的人怎么样? 换句话说,头发有些色调偏深的区域,可以吗? 另一方面,非负整数的集合{0,1,2,3,4,……}不是模糊集合. 我们确切地知道,哪些元素属于它,哪些不属于它. 谁在老年人集合里? 答案要看你问谁. 问一个 5 岁女孩,她可能说,超过 15 岁的人. 问一位百岁老翁,他或许说,

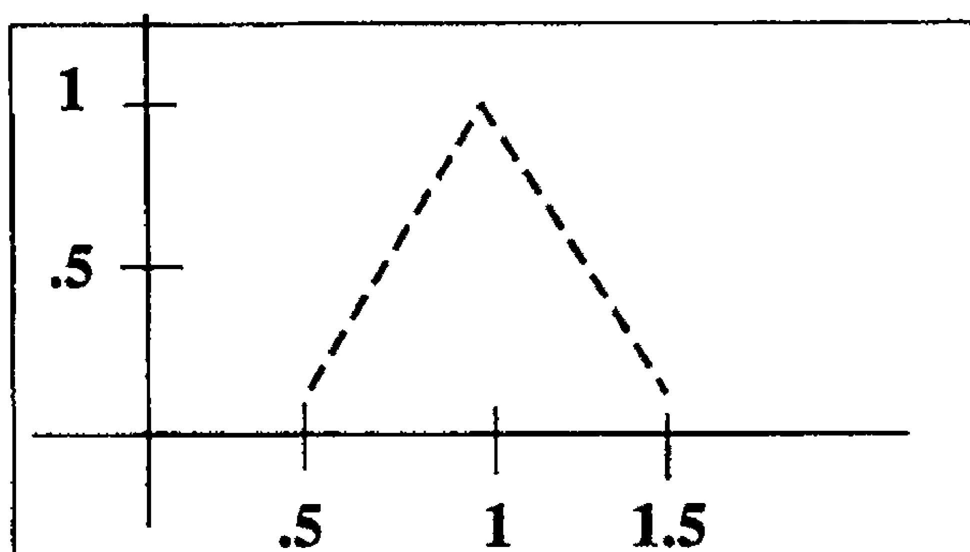
---

[1] 模糊逻辑起源于 1920 年逻辑学家 J. 拉卡西维茨(J. Lakasiewicz),他把传统的是与非的逻辑修改为"多价"(多值)逻辑. 后来,1965 年,数学家 L. 扎德(L. Zadeh)将多值逻辑应用到集合论,发展了模糊集合. 此后,术语"模糊"被用到越来越多的事物.

超过 90 岁的人.不同的老年人模糊集合,可以有很多个.关于模糊数,也有类似情形.有没有模糊的 1? ……对于美国国家税务局,考虑 1 美元的数值.无论精确值是 1 美元,1.01 美元,1.003 美元,0.97 美元,等等,它们都被看成 1 美元.对于国家税务局,它们都是 1 美元.但是当化学家进行某项测定时,1 和 1.01 是截然不同的两个量.



让我们比较仔细地对比 1 和模糊的 1.1 就是 1.它在数轴上有一个特定的位置.有一条线段,界定了它的准确位置[线段一端是 0,另一端是 1].没有其他数能够占有那个位置.那个位置百分之百是 1.可是,也有一些数,完全有理由说它们是1,又不是1. $\frac{999}{1000}$在某些情况下,差不多它自己就是 1.国家税务局把$\frac{999}{1000}$美元看成 1 美元.1 对于每个人都是 1,但是模糊的 1 却因人而异.可以在 1 的两旁取一个长度



为$\frac{1}{4}$的区间，将其中各数叫做模糊1的一个模糊集合. 其他人可能把在1附近长度为$\frac{1}{8}$的区间取成他们关于自己的模糊1的模糊集合. 这样就产生了模糊数. 它们的模糊性用度来表现，并且是相对的——但是，肯定地，模糊1决不是100%的1. 数学家已经在数轴上用不同方法画出了这些模糊数. 有一种方法是利用三角形模糊数，它的底边顶点是包含1的一个任意区间的端点. 例如，这里图中的三角形模糊数可以表示模糊1.

在已被用来在数轴上表现模糊数的其他的图形里，有梯形和指数曲线. 如果表示模糊1的模糊三角形足够瘦窄，它就变成了1. 这样我们就能发现，普通的数怎样作为模糊数的特殊情形. 正如普通数可以相减，模糊三角形数也能相减. 不过，每个模糊数能用无穷多种方式图示，就是说，有无穷多个不同的模糊数都能表现模糊1.

我们用模糊数干什么？数学家正在发展一种完整模糊系统. 在这里我们看到，模糊逻辑[2]作为传统逻辑的超集，用来处理部分真的、灰色的区域. 数学家已经发明了模糊微积分、模糊微分方程、模糊模型，……当然，还有模糊数.

现今国内和国外的工业正在利用并探究模糊系统，来设计"智能"

---

[2] 传统逻辑研究真或假，即是与非. 模糊逻辑却有许多灰色区域. 例如，把一块木头放进火炉燃烧，那么在它烧着的部位，已经不再是木头了. ——这件事是相对而言的. 我们不能完全确定，它在哪一瞬间不再是木头. 模糊逻辑是不确定性的逻辑.

的机器、计算机、汽车、地铁、空调，等等. 事实上，美国航空和宇宙航行局正在计划使用小型机器人球面[3]，其大小像垒球，在太空帮助 2002 年国际空间站完成各种任务. 所有这些模糊性，将要走向何方？ 时间会诉说答案. 现在刚刚开始.

[3] 卡内基美隆大学的 H. 乔赛特(H. Choset)曾为美国航空和宇宙航行局发展这些机器人出力.

它们(活动雕塑)不过是即兴抒情的发明,几乎是数学性质的技术组合,加上大自然的敏感符号,那肆意挥霍的自然,在千蝶飞舞时浪费花粉,那难以了解的自然,拒绝向我们显示它是否盲目继续因果轮回,或是胆小地犹豫地试探着发展观念.

——J. P. 萨特[J. P. Sartre,法国哲学家、作家、评论家,1905—1980 年]

数学和考尔德的艺术

在 20 世纪 30 年代前期,兴起了一种新的艺术形式——*活动雕塑*.它的发明人是 A. 考尔德(A. Calder).考尔德(1898—1976 年)出生在一个艺术家庭.他的父亲和祖父是雕刻家,他的母亲是多才多艺的画家.然而,他选择学习工程,这个领域影响了他后来发展的艺术形式.

如今活动雕塑随时随地可见.或许,当我们考虑微风轻摇树枝,叶儿挂在枝头,如何随风摆动,这时就有了一个活动雕塑[类似于一串悬挂的风铃,无风时展示静态美,有风时铃身摇晃,铃声叮当,显出动态美].正如考尔德自己指出,他利用自然作为他的模型,他说,"我觉得,在我能选取的模型中,没有比这世界更好的了.……不同尺寸、密度、颜色和体积的球,空中飘浮,流动的云,喷洒的水,气流,粘性,还有气味,这些都是变化和差异的最佳实例[1]."当他还是母亲身边的男孩时,接触过天文学,他把宇宙作为贯串他的作品的主题,他声称,"我的工作来自一个活生生的大模型[2]."考尔德的活动雕塑讲述自然界的动力学系统,例如星体严格有序的运行,色彩的变化,从最小

---

[1] 摘自考尔德作品展,[美国加州]圣约瑟现代美术馆,1998 年 2 月至 11 月 15 日.

[2] Ugo Mulas and Howard Amasar, *Calder*, The Viking Press, New York, 1971, page 45.

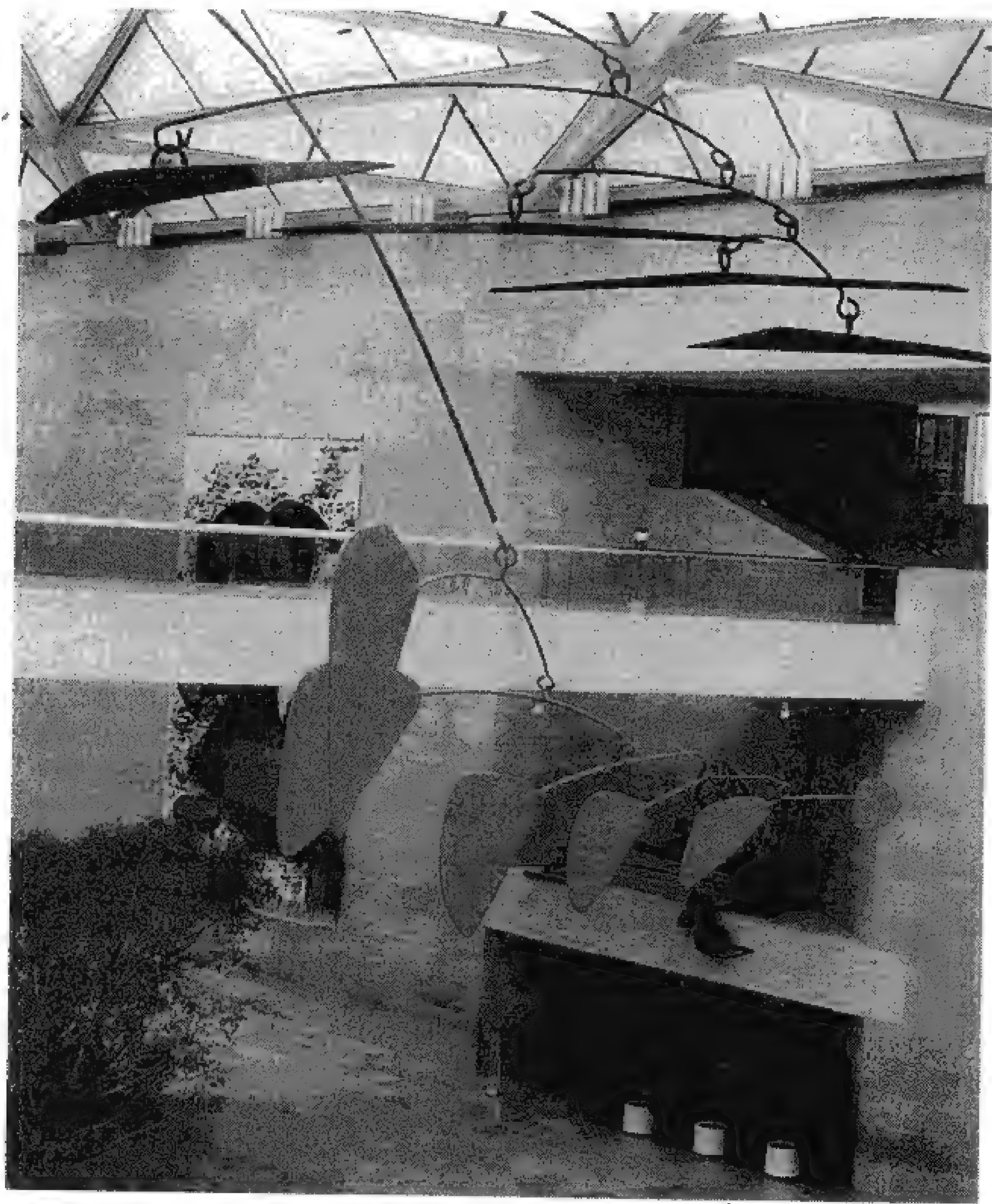


考尔德的一个稳定雕塑.法国巴黎德方斯广场.

的分子到巨大海浪的运动. J. P. 萨特这样描述它们:"活动雕塑不表明什么,除去它们本身之外,你什么也不要想.它们是活动雕塑,这句话就包含了一切;它们是绝对的.关于它们的不可预料因素,超过人类的任何其他创造物.所有的人,包括活动雕塑的作者在内,都无法预见,它们能被做成怎样的复杂组合.根据运动的常规结果,画出它们的草图,然后把剩下的工作留给它们自己去做.它们能做什么,取决于每一天里的具体时间,当时的太阳、温度或风.……"[3]虽然此时没有复杂数学理论的形式标签,这些活动雕塑却说明了混沌和有序之间的平衡行为.萨特描述这样一场混沌与有序之间的拔河大战,说道:"突然,一个活动雕塑在我身旁出现,原先它很安静,此刻变得激动起来.我很快将思绪拉回到它出现之前的时刻.不过,后来激动停止,又恢复了平静,……这些徘徊的反复的探索的笨拙的突然的结果,以及最重要的,那种天鹅一

〔3〕同〔2〕中的书,第45页.

般的优美雅致，使一个特定的活动雕塑显得非常奇妙，成为介于物质和生命之间的某种事物."[4]难怪考尔德的活动雕塑会显示出那样复杂的形式.一个活动雕塑的设计，自身固有多种物理势力，在那里各自工作，在那里互相争斗：

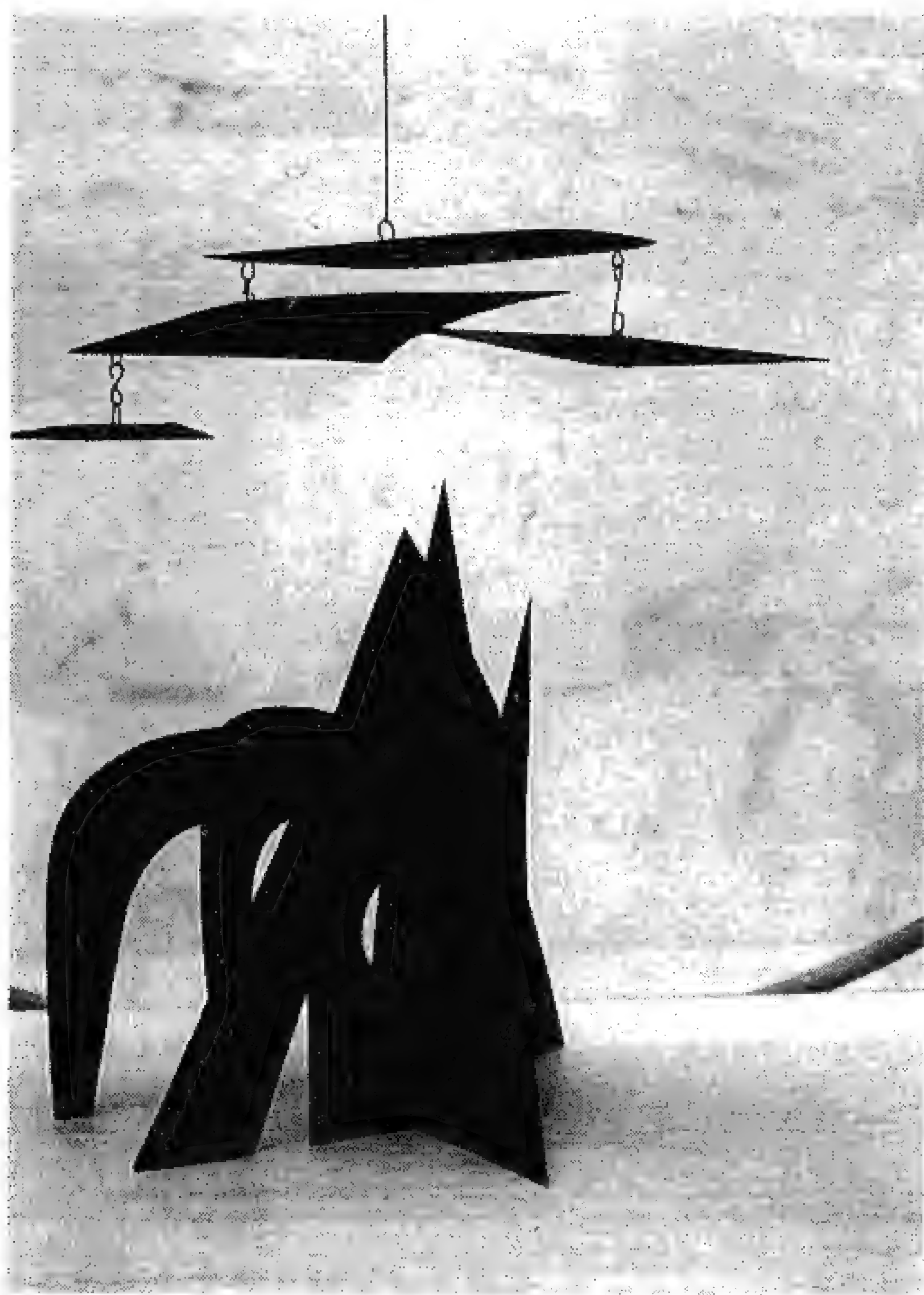


考尔德的一个活动雕塑.美国华盛顿特区国家美术馆东楼.

[4] 同[2]中的书，第47页.

——多个重心(它的每一部分有一个重心,整件也有一个重心),
——离心力引起摇晃,
——周期性的圆周运动,
——速度和加速度,
——向量,
——不同密度的中心.

所有这些因素,考尔德在工程问题中都经历过.



考尔德的一个半活动半稳定雕塑.
展示在华盛顿特区参议院大楼里.

虽然考尔德也干过其他工作，但是他的雕塑最有名，包括活动雕塑和稳定雕塑[5]. 他的活动雕塑看上去好像很容易在空气里飘浮. 它们占据了这么大的一块空间部分，似乎人们并不有意碰它，只是凭借微风或振动，去影响它那敏感的运动. 它总是令人想起傅科摆与宇宙[地球自转]之间的联系. 活动雕塑的形状和运动方式，属于我们经历过的模式. 就连他的稳定雕塑，他那巨大的稳定的金属雕塑，也包含运动——通过它们外形的弧与曲线的投影而产生移动. 当我们在它们附近走动，从不同的地点和方向透视，目中所见曲线的形状和大小就会发生变化. 我们[自己也参与其中，]实际上成为一个稳定雕塑的活动雕塑部分.

考尔德的工作涉及每一个人. A. 爱因斯坦给予了最高赞扬. 他被考尔德的活动雕塑深深吸引，感慨地说，“一个宇宙”，并且为他自己没有想到这种发明而遗憾.

---

[5] 1932 年 M. 杜尚把考尔德的作品取名为活动雕塑. 同年 J. 阿尔普(J. Arp)将考尔德的另一类作品取名为稳定雕塑.

在自然界中，没有事情是偶然的. ……一件事显得偶然，只是由于我们的知识不完全.

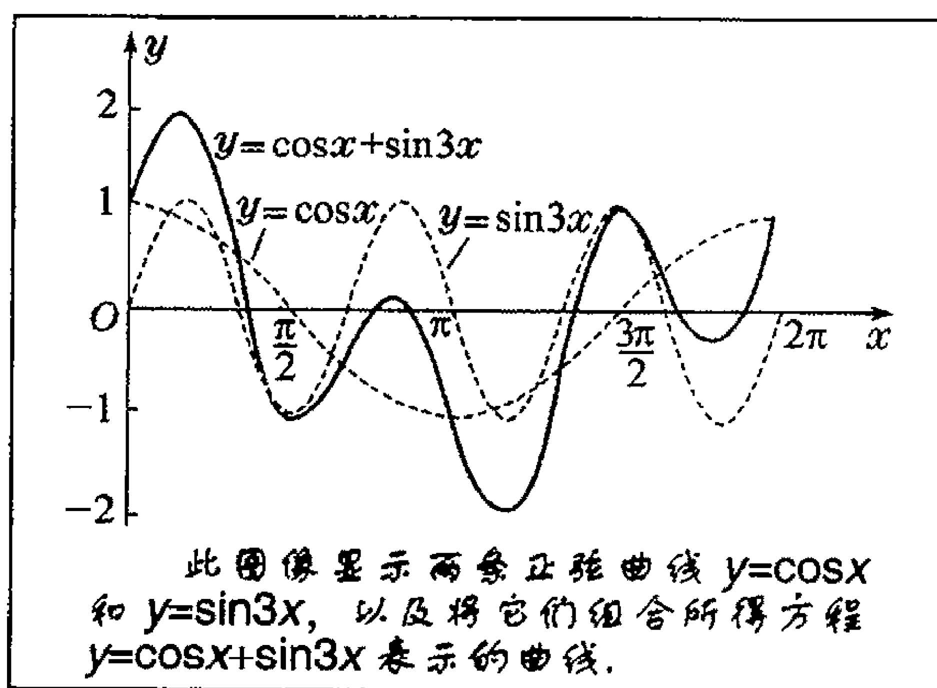
——斯宾诺莎[Spinoza，荷兰哲学家，1632—1677 年]

小　　波

——描述声音和其他事物的一种数学方法

在不知不觉的酝酿过程中，利用指纹辨认个人特征的方法发展起来. 它们甚至能将一对双胞胎互相区别. 用数学研究指纹，应该做些什么事呢?

数学用来描述指纹，起源于声音的数学研究. 19 世纪法国数学家 J. B. 傅立叶聪明地发明了用正弦曲线(无穷多周期的函数图像)来描述和复制声音. 不管声音有多复杂，总能用有限多条不同的正弦曲线组合，描述一种特定的声音——它可以是一个音符，或者是一棵树倒下地的响声. 正弦波依赖于声音的图像和方程中的振幅和频率. 演奏一个音符时，振动具有一个特定的频率，并且有一个特别的振幅. 频率和振幅这两个特征，伴随着音符，因而伴随着曲线，直到声音消失. 这说明了为什么一种特殊声音的正弦曲线持续重复相同的波形. 多年以来，这些正弦曲线已被用于描述声音以外的其他事物，而且在这样做的过程中，数学家创造了一个数学分支，叫做傅立叶分析. 傅立叶分析利用正弦曲线和正弦方程描述无线电讯号和心脏跳动，为特种器械设计最适宜的结构. 这些波能用来表现一个单音，例如 A 调的音符，也能表示复杂的混合声音. 为了描述混合声音，可将各个单音的正弦波组合叠加，成为一条新的波动曲线(见图). 这种方法有缺点，因为每个单音波的信息(即每一个的振幅和频率)在最后的曲线里丢失了. 举例来说，假定你有一个问题 3+5=8. 最后结果是 8. 如果我只给你数字 8，问你，我拿什么数相加得到 8? 存在无穷多种可能情形——1+7，0.3+0.7+5+2，等等. 所以，在一间充满各种声源组成噪音的房屋里，用正弦波描述这种

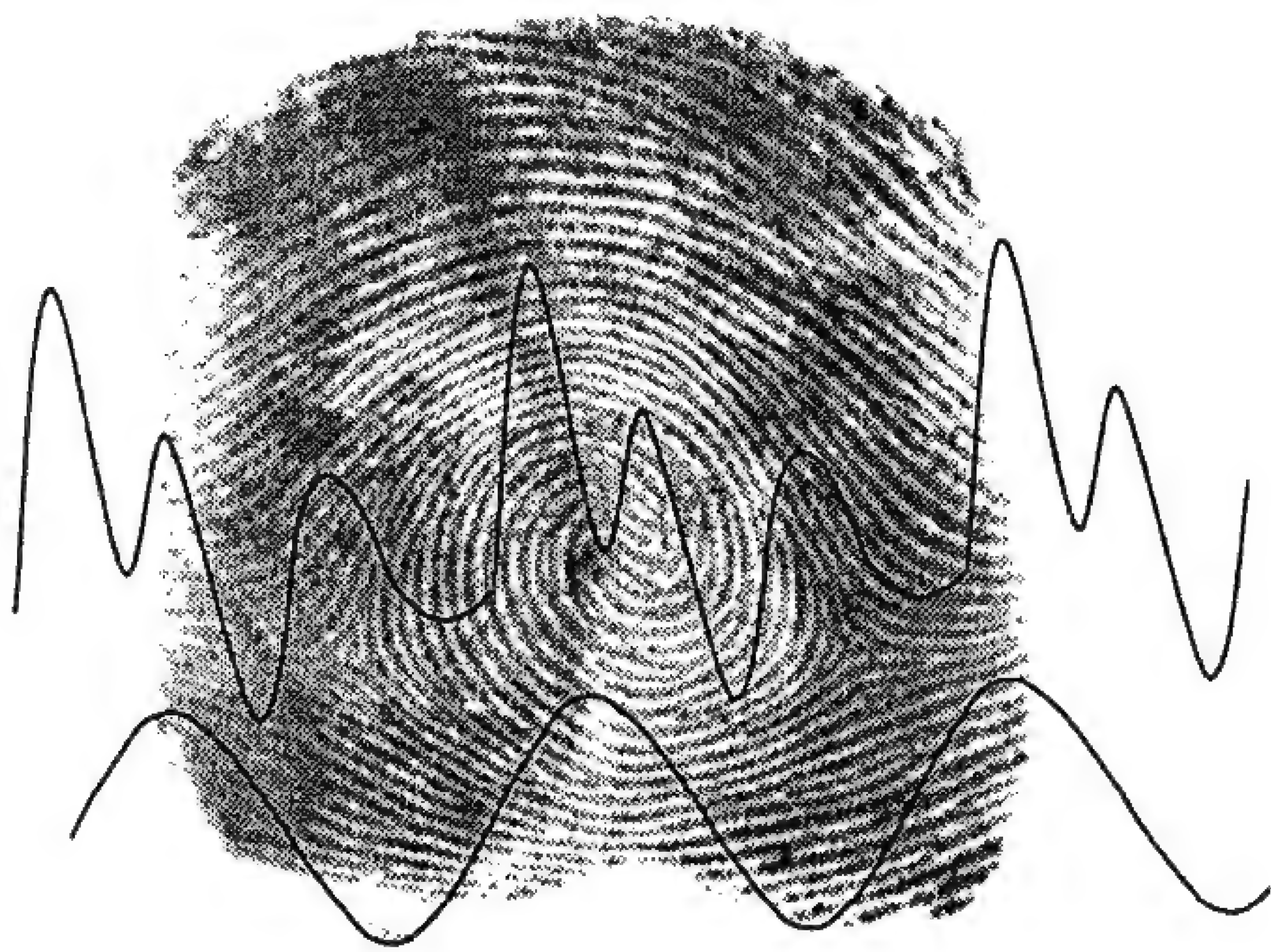


此图像显示两条正弦曲线 $y=\cos x$ 和 $y=\sin 3x$，以及将它们组合所得方程 $y=\cos x+\sin 3x$ 表示的曲线.

噪音时，不去分辨合成噪音的各种个别声音，或者其中出现的一些特殊声音. 为了改进从傅立叶波可能获得的信息，数学家决定把时间引入图形，将波切断，成为较小的固定区间. 如此得来的每个区间，叫做一个窗口，有它自己的正弦波来描述它. 当一个窗口里只有它自己的声音时，其特征在本窗口中受到保护. 但是，在一个窗口里面经常出现若干不同声音，却在全窗口内依然只用单独一个正弦波. 换句话说，各种声音的个性，在时间窗口内不再受到保护. 此外，一个特殊声音可能越出窗外，因而它的单个波又有更多的遗失. 这些窗口都有固定的长度，类似于乐谱中的小节. 这些窗口中的迷你波，仍不足以描述房间里的每个声音分支.

1987 年迎来一大突破，I. 多布琪丝(I. Daubechies)发明了小波. 多布琪丝用一种新方式将时间引进图像. 她把声音的音调与时间联系起来. 音调较高的，小波较短. 因此，描述每个声音的小波是单独一段曲线，而一串小波可以用来描述由声音或对象组成的一个混合体. 这些小波像是声音的分形——当你远离小波而立，感觉到的是室内声音的总体情形，但是如果你与它零距离，那么个别小波将会进入视野. 傅立叶迷你波是周期性的，它们重复自己的形状. 然而，多布琪丝的小波却不是多次反复的.

这些小波怎样联系到指纹、心跳、无线电讯号、静电噪声、地震？任何能被描述或能表现为图形或声音(振动)的事物，都可利用小波表示它的特征. 人们甚至惊奇地发现，在汽车管理局里，指纹墨迹怎么被荧屏纹样代替了？现在将人的指纹分解成一系列小波，它们各有特别的振幅、频率和长度. 指纹的小波被转换成数字描述形式(方程和



数值),可以通过计算机存储,并用电子方式传输.起初,一个标准指纹需要大量的计算机数据空间[1].后来有一种巧妙方法,可以压缩信息,使它们占用的计算机空间缩小到$\frac{1}{20}$.这种方法有效地帮助了识别和匹配指纹.

小波与声波纹结合,属于生物统计学领域.在这里,数学将物理特征和行为特征数量化.除去指纹之外,其他个人特征包括眼睛的网膜纹、声纹、DNA 纹、手的几何学分析.

将日常现象数学化,涉及多种深入的学科分支,数学的足迹不断地踏进一些差别很大的领域,例如药学、量子力学、地震学、犯罪学、计算机和密码学.

---

[1] 指纹被表示成看作二维函数的小波的组合.在洛萨拉摩斯实验室工作的 J. 布拉德利(J. Bradley)和 C. 布里斯龙(C. Brislawn),以及联邦调查局的 T. 霍珀,设计了一个指纹小波标准,它将 10 兆数据压缩到只有 50 万字节.这些电子指纹与指纹原样的匹配已经接近完美.

……唉，始终是一个自然之谜，每一种试图确定经度的方法，都被证明有毛病.

——U. 埃柯[U. Eco，意大利哲学家、历史学家、文学家，1932—]，《昨日之岛》

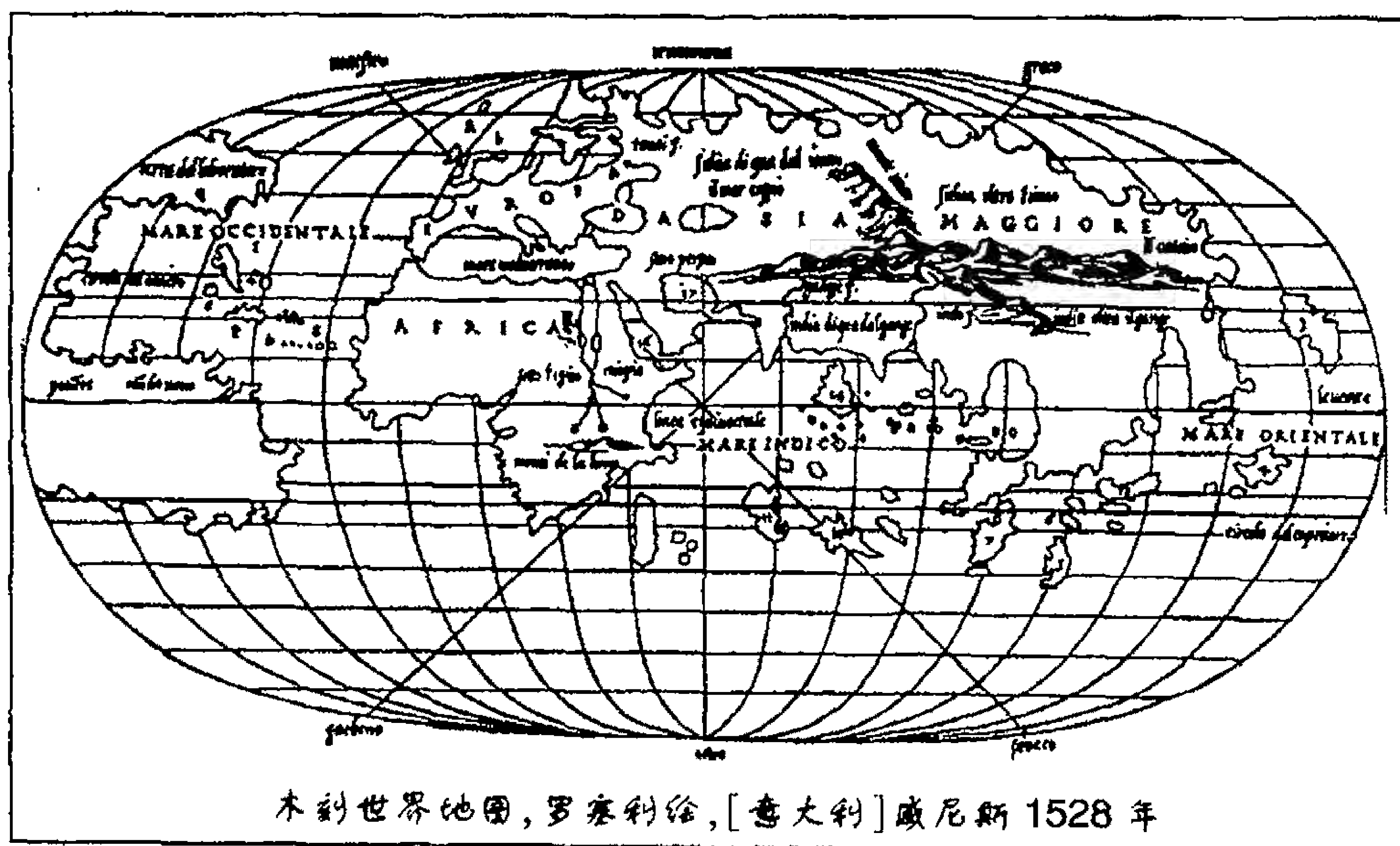
经度问题

库克船长、布莱船长、达尔文(Darwin)、牛顿、伽利略、哈雷(Halley)、卡西尼(Cassini)、惠更斯(Huygens)、虎克(Hooke)和弗拉姆斯蒂德(Flamsteed)有什么共同之处？他们，还有许多其他人，都以某种方式与难以捉摸的经度问题发生联系，一旦解决这个问题，将会对我们的生活产生深刻影响.

如果没有正确而又实用的方法确定经度，新世界的探险只能碰运气，充满危险，劳而无功.

我正在哪里？我曾在哪里？我将去何方？听起来，这些可能像是哲学问题，但在实际上，它们是航海人员生死攸关的问题. 答案依赖于一类不寻常的坐标系，它起源于公元前 276 年左右，埃拉托塞尼(Eratosthenes)第一次在世界地图上画出经线. 此后多年，人们利用经线和纬线，将当时所知世界的地图打上格子. 例如，公元 150 年左右，托勒密(Ptolemy)绘制了他的世界地图册，叫做 Geographia. 他的地图既有经线，又有纬线. 可是，只知道一个地点在地图上的坐标，并不意味着海员明白怎样到那里去，或者怎样从那里回来. 在伽利略的时代，尚未出现借助人造卫星的精密全球定位系统，也没有无线电，不能像现在这样几乎立刻确定船的位置，并且及时传送位置消息. 水手只能依靠满天星斗、简陋工具、好天气和直觉，这几样都不怎么可靠. 海员、商人、探险家、国王、科学家，全都知道，如果能确定人在海上的位置，对于经济和政治有多重要. 有许多悲惨故事广泛流传，讲述在大海里船舶失踪、饥饿、坏血病或者溺水身亡. 例如，在 1741 年

的一次航行中，海军准将 G. 安森(G. Anson)迷路了，只好来回航行，寻找胡安·费尔南德斯岛. 由于他的错误，许多水兵染上坏血病，甚至连最有经验的船长也会迷失方向，长时间偏离开航线，在茫茫大海中寻觅陆地. 例如舰队司令 C. 肖维尔(C. Shovell)爵士，在 1701 年由于经度判断错误，损失惨重，使他的五条船里少了四条. 那些船遇见了埋伏在航线上的海盗.



木刻世界地图，罗塞利绘，[意大利]威尼斯 1528 年

为什么纬线和经线组成的球面坐标系不能引导这些船员呢? 水手利用测量仰角的器具观星，知道如何确定他们的纬度[1]. 问题在于怎样确定经度. 纬线是画在赤道上方和下方的平行的圆. 赤道的纬度规定为 0°，北极和南极纬度分别是北纬 90°和南纬 90°. 另一方面，经度涉及地球上通过两极的大圆. 经度的起点是一条 0°经线(实际上是半圆)，叫做本初子午线，它的位置可以任意指定. 经度是一条经线(半圆)从东

[1] 纬度是相对于赤道而确定的(赤道上任一点的纬度是 0°). 北极的纬度是北纬 90°，南极则是南纬 90°. 你可以估计自己所在的纬度，只需将一只手的食指对准北极星，再将一个另外的手指放在水平位置，量出这两个指头夹角的度数. 这就是你的纬度.

边或西边与本初子午线所成角的度数. 这些半圆又称为子午线[2],现今的本初子午线通过英国伦敦的格林威治[天文台旧址]. 1884 年,26 个国家会晤,商定本初子午线通过英国格林威治,并且建立时区制,沿用至今. 本初子午线历年曾经用过的其他位置有: 亚速尔群岛、佛德角岛、罗马、哥本哈根、耶路撒冷、圣彼得堡、比萨、巴黎和费城. 想象地球被子午线覆盖,其中有 24 条把地球分成 24 个时区. 24 条子午线(经线)将地球截得 24 个时区,每区 1 小时. 两条相邻子午线之间,沿赤道的距离最宽. 沿着一条子午线,从赤道向北或向南移动,两条相邻子午线之间的距离逐渐减小,直至到达极点时,距离为 0.

注重商贸的航海国家,清醒地意识到,解决经度问题,是多么的重要. 事实上,多年以来,法国、英国和西班牙都曾悬赏,鼓励解决经度问题. 这些年间,提出过数不清的解法建议. 下面介绍其中几种测量经度的方法.

(1) 磁差法. 用罗盘确定北磁极方向在盘面上的读数,与北极星指示的真实北方比较,得到它们相差的角度大小,由此可求出本地的经度[北磁极并不是地球的北极. 根据现代测量统计资料,近期北磁极的位置大致在北纬 78.5°、西经 70°附近变动]. 但是磁差读数因地而异,造成这种方法有误差. C. 哥伦布(C. Columbus)在他 1492 年第一次航行到美洲时,首先注意到这种指南针磁差随经度变化的现象.

(2) 呆算法.

(3) 药粉感应法,是一种虚构的方法. 设想有一条受伤的狗,正午时候在港口将一种长效药粉敷在绷带上,为狗包扎伤口. 药粉留在港口,伤狗随船远航. 每逢港口的正午时间,药性发作,狗就会叫起来,让船长知道,此刻按照出港口的时间是中午 12 时整,这样就能求出港口时间与航船目前位置的当地时间之差,因而推算船位的经度.

---

[2] 当两条子午线组成一个大圆时,把这个圆叫做子午圆. 术语"子午线"(meridian)来源于拉丁文 meridies,意为一天的中央,即正午. 无论你在何处,也不管哪个季节,中午时候,太阳直射到你的头顶上,你的身影就会全部落在那一条通过你脚下从北极到南极的子午线上.

(4) 利用木星的卫星. 这是伽利略提供给西班牙国王菲力浦三世的方法，这位国王曾在1598年宣布，用终身退休金奖励解答经度问题的人. 伽利略的方法，需要水手观察木星的卫星，并且在伽利略编制的星表上注明其位置. 这些卫星很难看见，尤其是在船的甲板上，所以这种天文学解法行不通. 17世纪中期，法国皇家科学院重新发展了这种方法.

(5) 1514年，德国天文学家J. 韦纳(J. Werner)觉得，沿着月球轨道，画出太阳和星的位置，可以确定经度. 理论上看似正确，但是当时的天文学家还不能预测月亮每天的路线，也没有精密仪器，能让水手用来测量某个星与月亮之间的距离. 大约1674年，英国的国王查尔斯二世问他的专家们(R. 虎克、J. 弗拉姆斯蒂德、C. 雷恩)，希望他们评估，法国人圣皮埃尔的方法是否可用. 结果建造了格林威治天文台，在那里，弗拉姆斯蒂德花费40年时间，绘制航海用的天体图. 在他死后，1725年出版了他的图册.

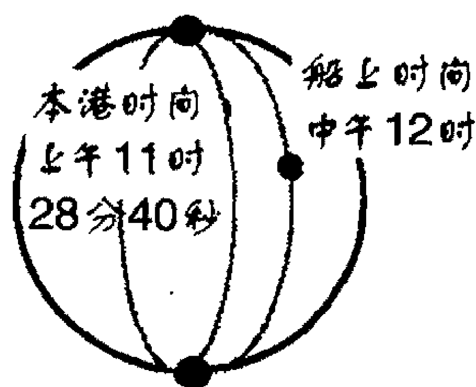
但是实际上并未解决问题. 一些科学家，如伽利略、牛顿、圣皮埃尔、卡西尼和弗拉姆斯蒂德，认为应当用天文学解决. 有些人觉得，造一个精确可靠的时钟，能够解答得更容易些. 事实上，1533年，地理学家R. G. 弗里塞斯(R. G. Frises)阐明，怎样利用一个机械的时钟，就能计算经度. 但在那时却没有时钟能达到这种方法需要的记时精确程度. 另外还提出了一些相当奇怪的建议.

眼看着不断发生的海难，商人、水手和科学家们大声疾呼，促使英国制定了1714年7月8日的经度法规. 除去星图、简陋工具或呆算，水手们需要更好的方法. 他们要有一种能在任何条件下发挥作用的一贯的精确的手段. 根据这个法规，设立了经度部，并且有20 000英镑的一等奖(大致相当于现在标准的1 000 000美元)，奖励第一个想出办法确定经度准确到$\frac{1}{2}$度的人[3]. 谁会解决经度问题，并且申请奖励呢？不

[3] 经度、时间和距离都与球形大地有关. 准确到半度的方法，意味着沿赤道准确到32英里(约51.5千米)，沿着经线向南极或北极移动时，距离相应地缩短.

幸，政治、阴谋、丑闻[4]和自私进入了画面. 许多科学家，包括牛顿、弗拉姆斯蒂德和 N. 马斯基林(N. Maskelyne)，觉得一个像时钟这样的机械设备不是可靠的解，唯一的可能方法是利用天体计算和绘图. 最后，格林威治的第一位皇家天文学家弗拉姆斯蒂德用 40 年时间绘制夜空星图，并将表格和星图汇编成集.

J. 哈里森(J. Harrison)，一位自学成才修理钟表的师傅，打算解决经度问题. 他觉得，如果他能设计一个时钟，使它不受海洋航行因素的影响，并能精确地保持出港口的时间，那么容易用下面的方法计算经度.



在船舶甲板上的时钟，将会保持出港口的时间(当然还应该知道出发地的经度，例如本初子午线或其他已知经度). 要确定船在自己航线上任何地方的经度，我们只需要简单地知道港口时间和船位当地时间的差. 例如，时差是 32 分 20 秒，那么计算如下：

- 地球被分为 24 个时区，每区 1 小时，总共 360°.
- 所以 24 小时＝经度 360°.
- 1 小时＝经度 15°.
- 时间的一小时被划分为时间的分和时间的秒.
- 经度的一度被划分为经度的分(符号是“′”)和经度的秒(符号是“″”).
- 于是 60 分钟时差＝经度 60′×15＝经度 900′.
- 因此 1 分钟时差＝经度 15′. 进而得到
- 60 秒钟时差＝经度 60″×15＝经度 900″，所以 1 秒钟时差＝经

[4] E. 哈雷等不及皇家天文学家弗拉姆斯蒂德同意出版他的星图. 因此，哈雷未经允许，私自秘密印刷了弗拉姆斯蒂德的星图. 弗拉姆斯蒂德大怒，拿走了他能找到的 400 份拷贝，全部毁掉. 弗拉姆斯蒂德认为他的图册还没有做好出版的准备.

虎克和惠更斯争论，谁有资格获得英国特许设计一个码头，因为他们两人都申请这项设计.

皇家天文学家 N. 马斯克林多次试图阻挠哈里森申请英国的经度奖. 他尝试取而代之，推荐他自己的错误的天文学解答.

度 15″.

• 因此,在上面这个例子里,船上的当地时间与出发地港口时间之差,即 32 分 20 秒时间,可用如下方法转化成经度读数——

• (经度 15′)×32=经度 480′=经度 8°(因为 480÷60=8),

• (经度 15″)×20=经度 300″=经度 5′(因为 300÷60=5).

• 所以,如果船上的当地时钟读数多 32 分 20 秒,那么船在此地的经度位于港口东边 8°5′;如果当地时钟读数少 32 分 20 秒,那么船在港口西边 8°5′.

• 将船的经度和纬度结合,就能在地图上找出它的精确位置.

哈里森确定了哪些材料能自我润滑[减少磨损],怎样补偿温度变化,以及如何旋紧时钟的发条,使它计时没有误差. 他的时钟是复杂而又精密的作品. 他最先设计出一座可以平安渡过远洋航行并能满足经度法规指定精确度的时钟. 他从 1727 年开始致力于经度问题,为了设计他的时钟,在他生命中耗费了 46 年时间. 对于哈里森,他的工作已经成为一种心爱的劳动,迷人的劳动,完美的劳动. 多年以来,他向经度部提交了五座航海时钟[5]. 他的 H—4(第四座时钟)在 1761 年航海试验中,出色完成任务,精密程度达到了一度的 $\frac{1}{50}$ 以内. 经度部是否将他应得的奖发给了他? 没有! 他们改变主意,修改法则,附加条款,声称不考虑 H—4. 他们给哈里森 1500 英镑,作为安慰,坚持 H—4 还必须通过第二次试验. 这么多年,经度部给他低额薪金,让他维持工作,但是等到他应该获奖的时候,他们却后退了. 现在哈里森老先生决心谋求解决办法. 1773 年,造出他的第五座时钟之后,他争取到国王乔治三世的支持,这位富有同情心的国王听了他的故事,试了他的精美时钟. 国王直接去找国会,结果是国会同意给哈里森 8750 英镑. 令人遗憾,不是经度部的奖赏. 1773 年,经度部采用了一个新的带有复杂条件的经度法规,始终没有颁发奖金.

---

[5] 他的第一个时钟大约重 72 磅[约 33 千克],而他设计的最后一座钟的尺寸小得像怀表.

像许多数学问题一样，在寻求经度解答的途中，产生了另外一些重要发现. 悬挂重物作为动力或利用水力的钟，让位给螺旋发条作动力的时钟. 伽利略在利用他的星历表发现木星卫星的过程中，发现了钟表的发条装置. 丹麦天文学家 O. 罗默(O. Römer)在 1678 年发现了，光的速度是一个可测量的有限速度值. 罗默利用他的天文观察数据，计算出光速为 240 000 千米/秒. 现今已求得光的实际速度是 299 792. 458 千米/秒.

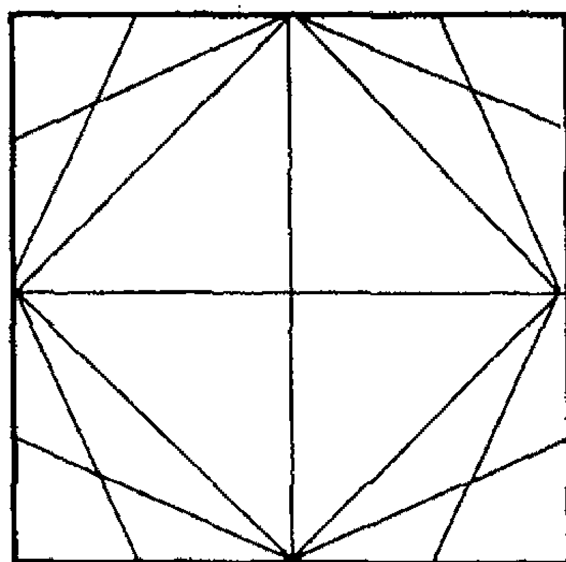
像经度问题这样一些问题，已经成为将我们的技术推向前进的催化剂. 今天，我们已经走过了从砂漏钟到原子钟的漫长道路，我们的复杂追踪系统和雷达代替了经度问题的旧解法. 如果说它的解答过程像戏剧，那么数学就是一位重要的演员.

想必需要很多年，才会认识到，一对野鸡和两天，都是“二”这个数的实例.

——B. 罗素[B. Russell，英国哲学家、数学家、逻辑学家，1872—1970 年]

折痕中的数学

有没有想过，在折纸中会隐藏数学观念？就看这个折叠的正方形吧.



你见到了什么？

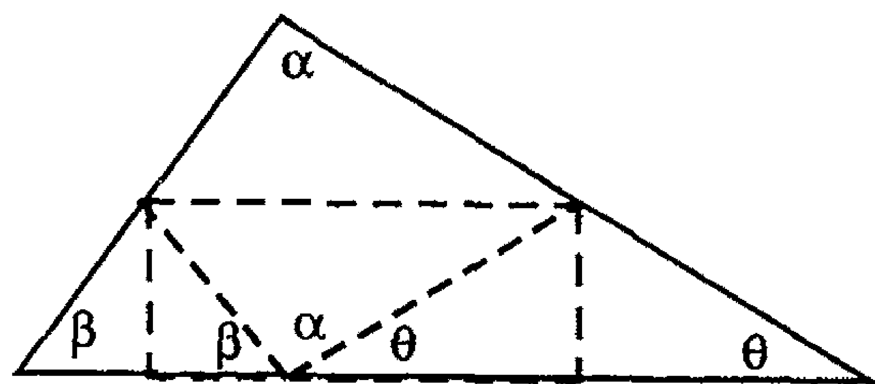
你看见一个内接正方形吗？

你能不能找出一个正八边形来？

第二个图形怎么样？

你能否看出，它的折痕如何证明三角形的三个角之和等于 180°？

现在考虑下一页的折纸天鹅图形.



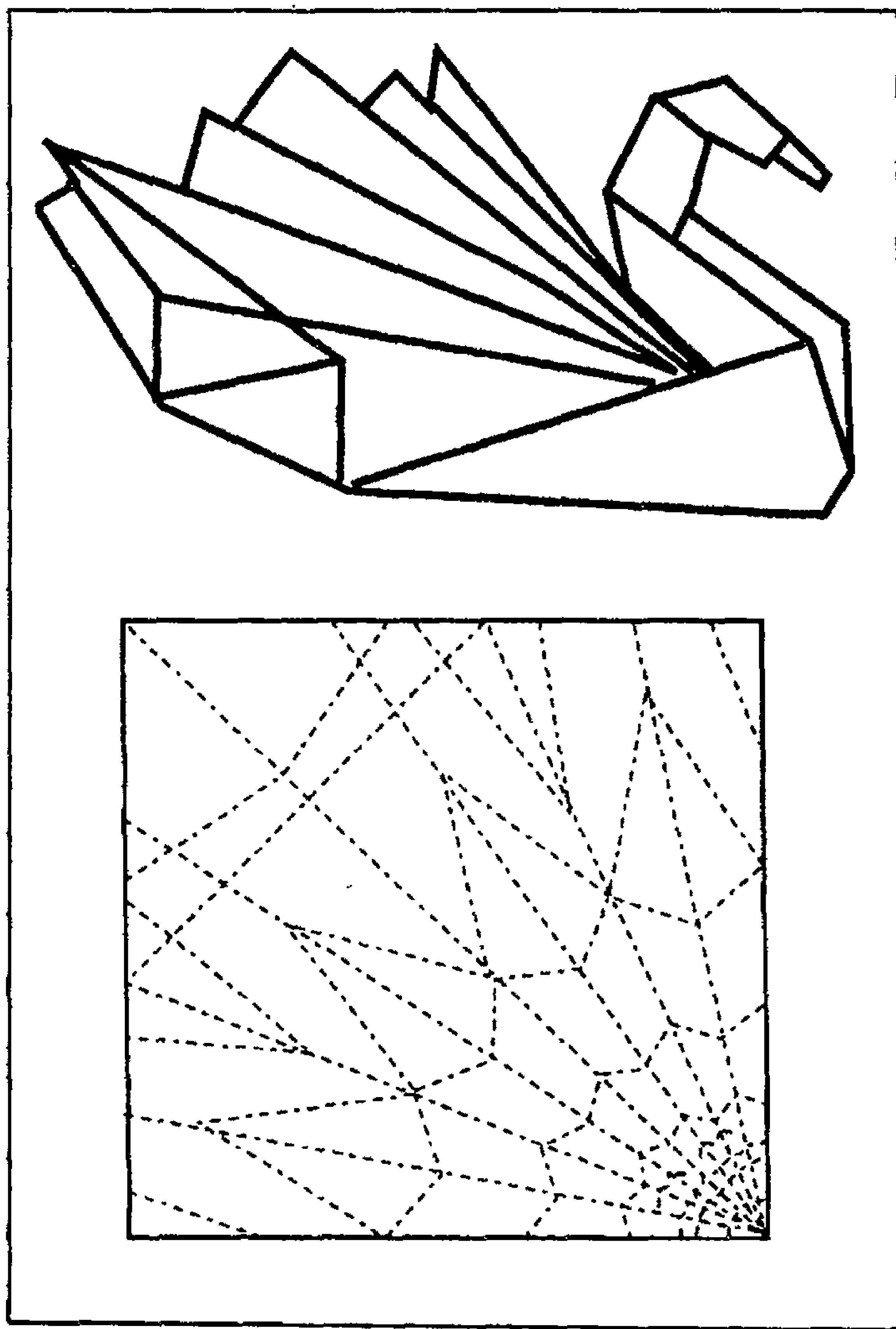
在折成的天鹅下面，画着将纸展平恢复成正方形的情形.

研究这些折痕. 你见到什么了？

- 注意线条的对称.
- 注意图案的重复.
- 仔细观察，发现一个自我复制的图案，由此联想到分形的数学特征.

通过折叠正方形，创造出一个折纸图形，你能把一个二维对象转化成三维的对象——在某种意义上，一张正方形纸片变成具有弹性[可以

连续变形],这正是拓扑学领域里研究的性质[1].不妨想一想——在一张纸上的任何一点周围,都有潜在的360°角,可以用来折叠.

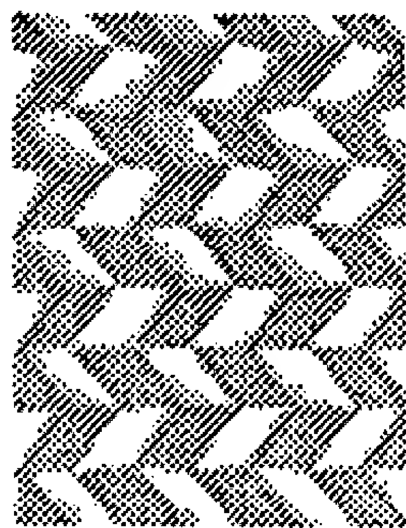


这些例子说明,在折纸中隐藏了某些数学.大家知道,数学家也玩那些被门外汉看成娱乐或消遣的对象,例如肥皂泡、折纸工艺品、折纸

[1] 拓扑学是数学的一个分支,研究图形在例如伸展之类的各种[连续]变换之下保持不变的性质.

变脸玩具、纸质多面体模型、幻方，以及镶嵌装饰，等等. 但是，对于数学家而言，这些对象提供了一种探究和发现数学观念的方法，而且或许有助于为一些看似与手头这种消遣全无关系的问题设计新的解法或证明.

在 1994 年 11 月召开的第二届折纸科学和科学折纸国际大会(IMOSSO)上，我们有幸会见了探索与折纸有关的高水平数学的数学家、科学家和工程师们.



日本东京大学退休教授三浦博士(Koryo Miura)和美国罗德岛大学的 T. C. 赫尔(T. C. Hull)，就是参加这次大会的许多数学家中的两位. 他们利用折纸发现了什么呢?

• 三浦博士是三浦折纸图案的发明人，这种图案被应用在日本太空飞行者人造卫星的可回收太阳面板上. 他折叠矩形的特别方式被用来折叠地图. 一大张地图，按照三浦折纸式样折叠，可以很容易地打开和合拢，成为整幅图或者它的一部分.

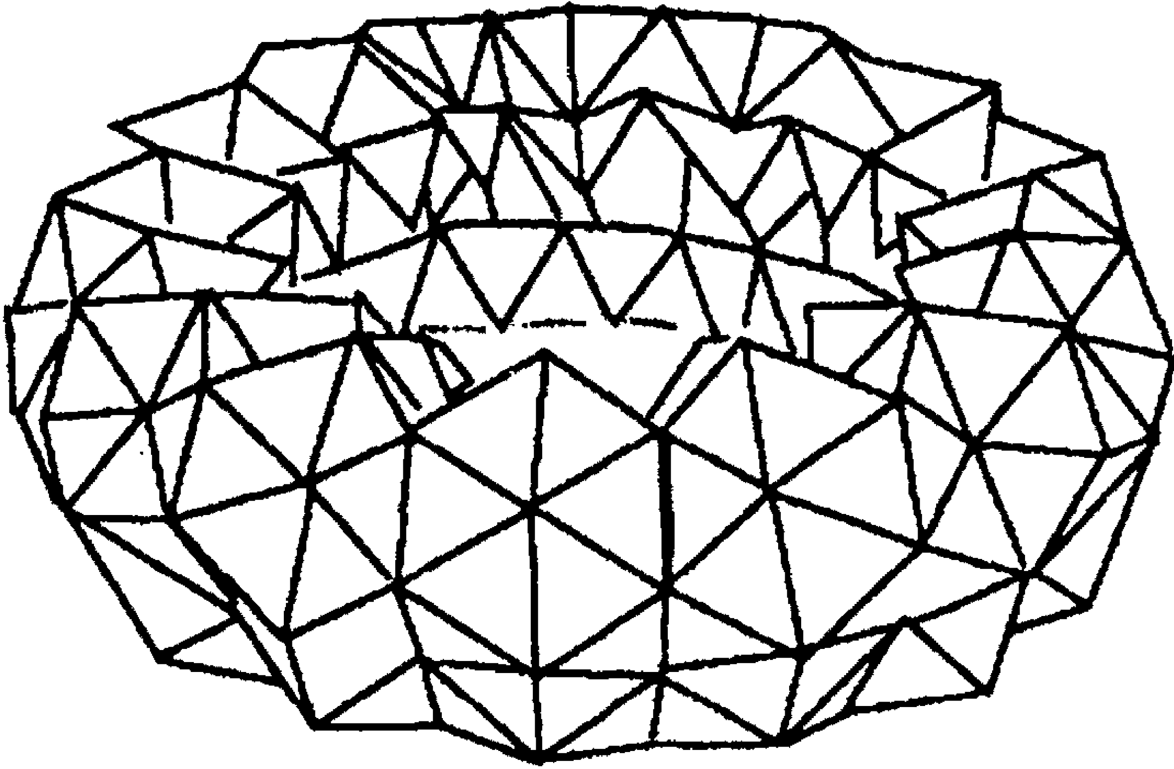
• 赫尔研究折纸形式与它们的折痕图案之间的几何联系. 利用图论数学工具，结合他关于折纸图案的工作，他扩充了其他数学家的想法，证明了很多定理. 他的工作，不但提高了折纸创作，同时也丰富了他对于平面图的研究. 此外，他又通过寻找周期的和非周期的墙纸图案，探索和研究折纸图案和镶嵌图案. 如他所说，“这里存在大量与其他数学分支相关的有趣问题.”[2]

• 数学家 W. T. 韦伯(W. T. Webber)是另外一位折纸数学家. 他利用镶嵌图和折纸的数学原理，把一张平坦的长方形纸片变成三维空间中一种别致的立体，叫做环形多面体(一个由很多三角形面围成的环状体). 这样一个对象能使韦伯满足吗? 不! 他用不同形状的三角形和折纸图案做过试验. 事实上，他已经发现了无穷多族具有独特性质的这

---

[2] Ivars Peterson, *Paperfolds, Creases, and Theorems*. *Science News*, January 21, 1995.

些纸环.他在纸上画出等腰三角形镶嵌图案,沿着三角形的边折叠,产生这些环形多面体.通过计算三角形面的交角,他用计算机确定,一个特别的模型能否真的成为环形多面体.到 1997 年为止,他还没有发现能产生环形多面体的等边三角形图案.唯有等待时间显示,这些数学环圈展开以后,将会带来什么宝贝.



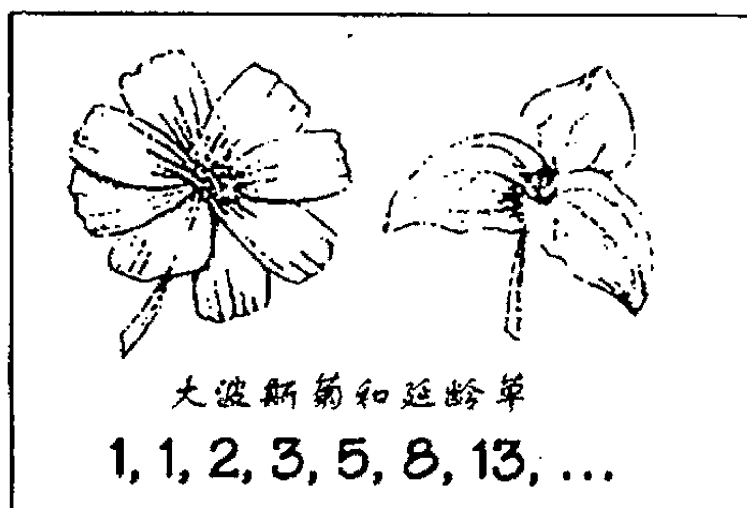
折纸作为一种艺术形式,历史悠久.折纸成为数学形式,是 20 世纪才出现的.折纸的数学美,在于它如何不断地融合艺术和科学,从而能以各种方式形成和发展创造性.

……自然一定遵守必要性.

——莎士比亚[Shakespeare，英国诗人、戏剧家，1564—1616 年]，《尤利乌斯·凯撒》，第四幕第三场

数学与自然形态

美国亚利桑那州石碑谷奇特而美丽的岩石形态，希腊梅特奥拉的岩石大本营，美国加利福尼亚州的奇怪海岸线，以及银河系的螺旋形星系——这些都证明了自然界各种因素之间的激烈竞争. 它们都能用数学概念描述. 一种数学考虑方式是研究图案——我们根据这些图案作出假设，得出结论，并寻找证明. 自然界中的重复图案，引起了很多与此相关的数学概念. 下面是其中的一些例子.



大波斯菊和延龄草

• 花瓣图案和树叶在枝干上生长的方式，使数学家认识到，斐波那契数列出现于一些花草树木中，例如大波斯菊和延龄草、榆树枝，以及菠萝表皮上的螺旋线.

• 非洲大羚羊的角、金银花的螺旋线、贝壳的漩涡、银河系的螺线、DNA 的双螺旋，在这些例子里见到的递归曲线，说明螺旋线能适应生长.


阿拉斯加巨角野羊的羊角螺旋



亚利桑那州的石碑谷

• 在晶体、岩层和珠宝表面，可以看到多面体形态，由此导致科学家将晶体按其形状和对称性来分类.

• 研究江河溪流的扭转、弯曲、变向，看似毫无章法，其实可以发现，它们的形状表明，水流的两点之间的最短距离未必决定水流方向，它们的自然弯曲受离心力和能量均衡消耗的支配，并可用随机性和概率描述.

• 一串肥皂泡沫、犰狳的鳞片、泥地的裂缝、玉米棒的芯、某些树的树皮、长颈鹿身上的花纹、蜂窝格子、美国加利福尼亚州魔鬼堆国家景区岩石的形状，在这些场合里见到的形态，提供了六边形、三叉连接和紧密填装观念的例证.

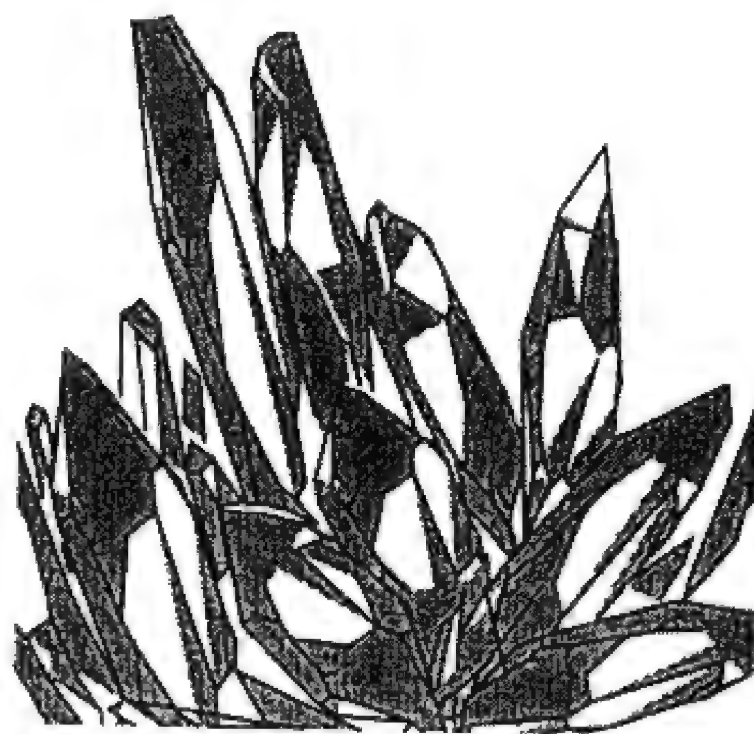
• 风吹沙滩的痕迹、云朵的姿态、火山熔岩流淌的形状、山脉蜿蜒的地势、蕨类植物叶形的重复，在这些例子里出现的图案，都能被数学家利用计算机和分形方程再现出来. 如今通过计算机，分形数学理论已经发展到新的水平，而且不断发现新应用以及它与自然的新联系. 分形由来已久，早在 19 世纪就曾对它进行过初步探索.

• 丝织物的纤维类似于三棱柱，这样的结构使丝显得富有光泽.



加利福尼亚州的魔鬼堆国家景区，M. 古德里奇(M. Goodrich)允许使用照片.

用数学描述自然，我们能做些什么呢？既然我们能用自己的眼睛看见自然，给它拍照片，为什么我们还需要方程来描述它的形状？概率和统计是数学的两个重要方面，它们常被紧密联系到数学建模领域. 方程不仅能描述一种形状，而且可以预先知道，如果改变输入，将会得到怎样的不同形状. 根据某些假定的变化，可以预测地质区域的演变. 能有些什么不同呢？关于……洪水……干旱……地震……火山爆发……水坝……火？利用数学、计算机和数学模型，综合这些假定，可以预料结果的范围. 在这



一簇晶体的多面体形态

里，条件差之毫厘(通常是初始输入数据发生难以察觉的微小改变)，结果可能就谬以千里，如混沌理论和复杂性理论所显示的那样. 以上这番话，讲的是自然形态的美丽和奇妙. 数学提供了窗口，向我们演示它进化的未来，并且显示我们的行为将会怎样影响结果.

在空间中，宇宙控制我，淹没我，如同沧海淹没一粟；但在思想上，我将控制宇宙.

——B. 帕斯卡[法国数学家、物理学家，1623—1662 年]

数学与金字塔建筑

埃及尼罗河西岸吉萨的大金字塔，耸立在今日游客们的眼前，人们举目凝视，其规模之大令人陶醉. 参观者留下深刻印象：这些古时候的巨大建筑物，没有现代先进技术可用，怎么能建造出来？有了现代的技术和材料，我们今天的房屋能够采取各种形状、层次和轮廓——例如美国旧金山圣玛丽大教堂的双曲抛物面，或者法国巴黎德方斯大拱门的变异立方体结构. 虽然如此，金字塔式的棱锥形建筑物，仍以它的方式反复进入现代建筑画面，为我们城市地平线上的众多景观，添光增彩. 我们能看到优美的棱锥形楼顶，例如美国旧金山的泛美大厦；或者作为采光的窗户，如法国巴黎卢浮宫的玻璃金字塔；甚至作为旅馆设计，让人想象墨西哥尤卡坦半岛玛雅人的金字塔.

棱锥形在数学上和实用上有什么优点？在古代，结构的稳定性是一个决定因素. 古时候的埃及人，并没有使用现代钢筋混凝土的方法去加强他们当时的结构. 他们需要一种自然稳定的设计. 熟悉了三角形，自然会考虑它的三维扩充[于是想到了棱锥]. 但是，什么形状的棱锥底面最适合他们用于建筑呢？古代埃及人知道，怎样利用绳结和勾股定理产生直角. 他们或许依靠边长为 3、4、5 的直角三角形，将绳子拉直成这三条边的长度，产生直角，从而得到他们金字塔的底面正方形[1]. 此外，棱锥形建筑物不需要在里面用立柱横梁支撑. 所以，底面是正方形

[1] 古时候有三种产生直角的可能方法——只用直尺和圆规作线段的垂直平分线；用绳子打结，得到边长为 3、4、5 的三角形；在圆内作一个半圆，然后以这半圆的直径为底边、半圆弧上任取一点为顶点作三角形.

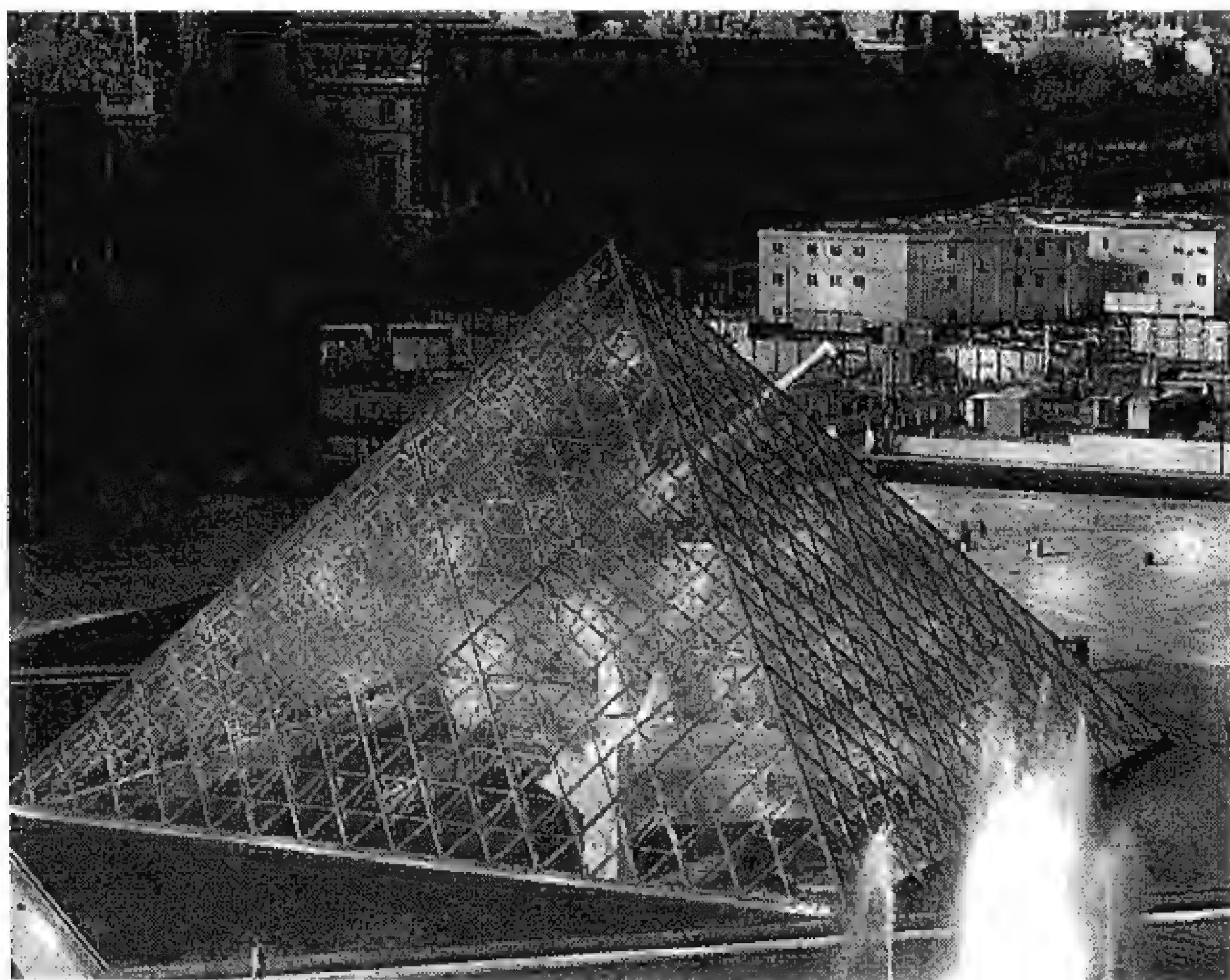
的棱锥，自然成为他们选择的建筑形状.



在美国加利福尼亚州福斯特市，这幢现代办公楼的设计中体现了棱锥形主旋律.

在今天的房屋设计里，棱锥是否还能提供任何优点呢？从数学观点来看，棱锥的底面可以是任何一种多边形的形状. 但是相比之下，其中有些形状更加适应我们的生活方式. 大多数家具最适合直角墙壁. 因此，正方形或长方形底面的棱锥，对于民居更为实用. 而从建筑学角度来看，任何形状的底面都是可行的，决定因素在于尝试. 利用今天的各种合金，建造现代金字塔框架，可以采用轻便材料，代替古埃及人用的 5 000 磅[两吨多重]的大石块. 框架可先预制部件，然后将半成品运到现场装配. 今天的金字塔，不一定要砌成实心的来维持它们的稳定性. 内部的支撑结构，释放出棱锥体内的开阔空间，让光线能照进来，透进来，并使室外生活区域与室内明亮的楼梯间、中庭及不同楼层相连. 同样美妙的是，棱锥形大楼每一层的室外阳台，不会有阴影遮挡下面一层楼的人家. 此外，棱锥形结构使风向往上的多，往下的少. 但是棱锥并非

没有缺点.由于它自下而上逐渐缩小,它的固有形状使大楼在有相同底面和楼高的条件下,无法达到最大可能的建筑面积.欧几里得几何讲到怎样求棱锥的体积[2]——说明了为什么棱锥体积恰好是与它同底等高的棱柱体积的三分之一.另一方面,棱锥形建筑物不一定要向上收缩到一点才结束,因为可以将它切断,减少由于收缩引起的建筑面积的损失.另外一些公式表明,棱锥外表面所需的建筑材料比棱柱的少.



法国巴黎卢浮宫的玻璃金字塔

现代金字塔继承了古人的天赋.在 4 500 年之后,金字塔昔日功能已成历史,建筑形式却延续至今,为某些人留下了一种神秘而有力的形式,为其他人展示了一种熟悉的形状.

[2] 古希腊数学家欧道克斯(Eudoxus,约公元前 400—前 337 年)证明了棱锥的体积等于底面积与高的乘积的三分之一.他来自克里杜斯,不但在数学和天文学方面有名望,而且在药学、哲学、修辞学、地理学和法学方面也有贡献.

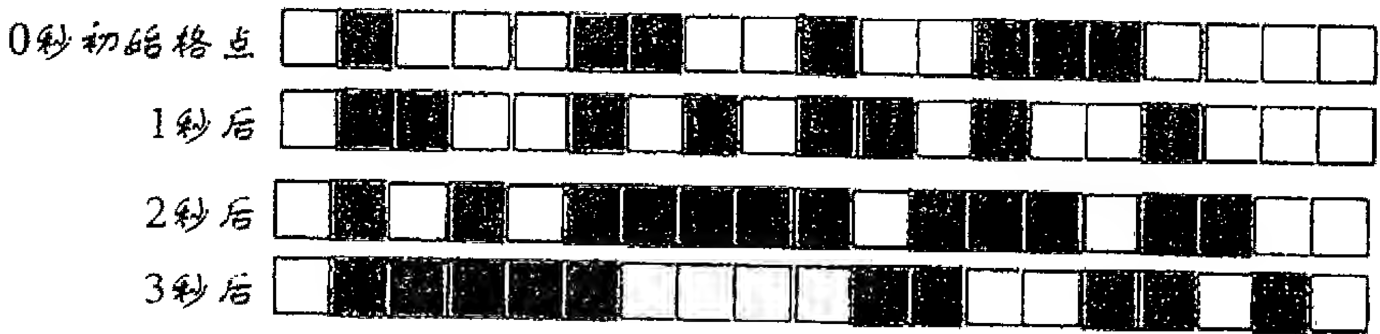
我从无到有，创造了一个陌生的新世界.

——J. 波利亚［J. Bolyai，匈牙利数学家，1802—1860 年，非欧几何发现者之一］

细胞自动机

——活动的像素

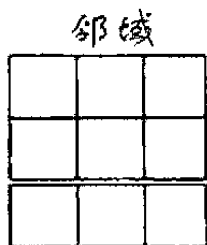
在计算机显示器的屏幕上，为了让那些点显示活动的图像，必须做什么事情？请看这一串数字——…00100000…. 应用一个简单规则：在每一瞬间之后，每个数字换成它自己与它右边相邻数字的和. ——于是数字串变成…01100000…. 有人怀疑，这有何难，有什么神秘，值得大

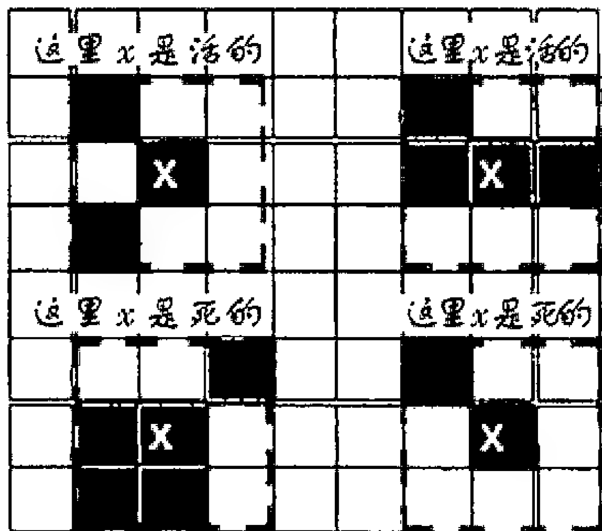


惊小怪？它似乎是一种基本程序，不过，在数学上，貌似简单的想法，可能最终产生深远的影响. 上面这个简单例子，说明了细胞自动机运行过程中的一步. “细胞”这个词，意味着某种基本的或必要的单位. “自动机”意为一台机器或一个机器人. 简而言之，细胞自动机由离散[1]的细胞组成，这些细胞在每个特定时间段内按照指定法则赋予离散的数值. 离散的细胞可能是像素，即计算机显示器屏幕上的小方点. 至于数值，举例来说，可能是二进制数字的 1 和 0，它们被转换成计算机显示器上

[1] 这里的“离散”，意为分开的、界限分明的. 如果在任何两个相邻对象之间，没有其他对象存在，那么两个对象是离散的. 例如，自然数是离散的，因为在两个相邻自然数之间不存在其他自然数. 像素是离散的，因为在两个相邻像素之间不存在其他像素. 上述情形大致类似于整数与有理数的比较. 在任何两个有理数之间，总能找到其他有理数，只需简单地取它们的算术平均值. 另一方面，在两个相邻整数之间，不存在任何其他整数.

的黑点和白点. 法则可能是一个计算机指令(也就是一个程序),叙述怎样把像素从黑变成白,或者从白变成黑. 细胞自动机可以是 1 维的、2 维的、3 维的、……、n 维的. 1 维细胞自动机可描绘成一串 1 和 0,或是一行黑白像素链,依照指定法则,在每个时间段内,即时改变. 2 维细胞自动机可在计算机显示器上实现为正方形格点的像素空间. 在 20 世纪 70 年代,数学家 J. H. 康威(J. H. Conway)提出一种 2 维细胞自动机,叫做"生命游戏". 在"生命游戏"中,一个细胞或者被认为是死的(0 或白像素),或者被认为是活的(1 或黑像素),且一个细胞的发展,依赖于它的邻域,即以它为中心的 3×3细胞(像素)正方形[在一个细胞的邻域中,除去它自己以外,共有 8 个邻居环绕在它周围]. 如果一个细胞有 2 个或 3 个邻居是活的,那么这个细胞也是活的. 如果一个细胞有 4 个或更多个邻居是活的,那么它就被挤死了. 如果它的邻居活着的少于 2 个,那么它就被饿死了. 另一方面,一个死细胞可以复活,只要它的邻域变成恰好有 3 个活细胞在里面. "生命游戏"可以从一簇初始细胞出发,并在演变的结果产生一些美丽的图案.





以上这些只是无限多种可能的细胞自动机中的两个例子[2]. 多年以来,宇宙现象已经被在大范围上观察和描述,即从广阔视角观看事物. 换句话说,宏观分析. 用于解释宏观的数学,主要依靠连续数学,侧重于微积分的观念. 现在有些数学家正迅速将视线转向事物的微观图像,他们所用的工具中,有很多依赖于离散数学、分形和纳米技术. 这里是细胞自动机的住所.

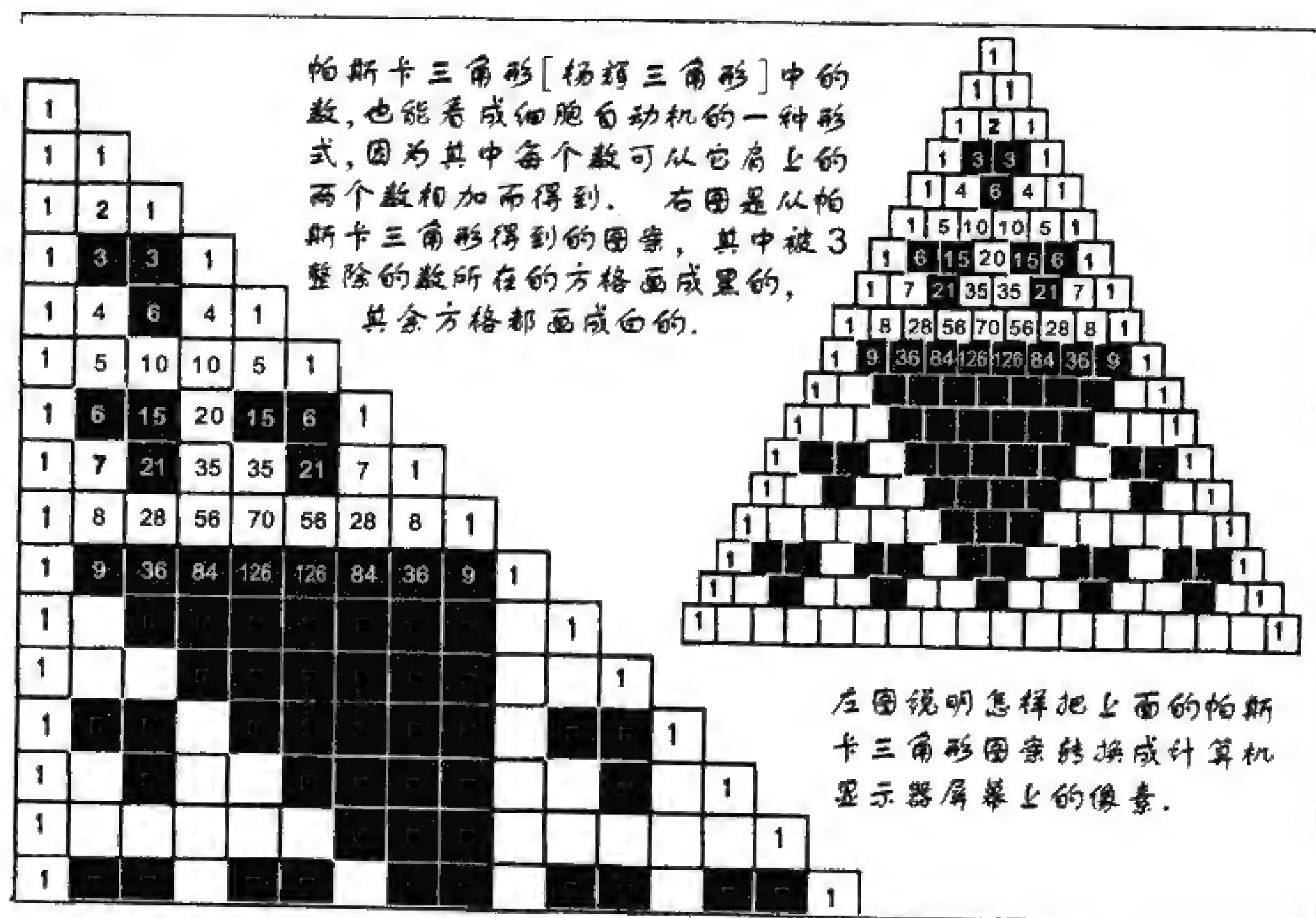
---

[2] 下面是另外几个已用法则的例子:

多数法则: 在这里,中心细胞的生命依赖于其邻域中多数细胞的情况.

东南西北邻域: 这些法则依赖于在中心细胞正东、正南、正西、正北方向的细胞的情况.

八分之一法则: 如果一个细胞的 8 个邻居中,恰好有 1 个是活的,那么它也是活的.



细胞自动机的概念,起源于19世纪40年代的K.楚泽(K. Zuse)和S.厄尔曼(S. Ulman).利用细胞自动机概念,J.诺依曼(J. von Neumann)说明了,如何编制程序,可以使一台计算机自我复制[3].随后,在20世纪70年代,"生命游戏"的出现,重新引起了对细胞自动机的关注.更进一步的兴趣,则是由于20世纪80年代S.沃尔弗拉姆(S. Wolfram)的工作.

现今离散数学的工作和计算机技术的进展,扩充了细胞自动机的研究,并将它们用来作为一种模型和模拟工具.这些人工生命的图案和模拟结果所形成的产品,直接联系着我们日常生活的许多方面.它们正被用于探究和解释生物学系统,例如细菌的增长、传染病的蔓延、以及在青绿色藻类中发现的丝状植物的生长.细胞自动机被用于模拟生态系统、社会结构、猎物竞争、森林火灾、湍流、流体动力学,甚至还用作催化剂的转换器.这些有限数学机器需要一群初始细胞和一组法则使它

[3] 诺依曼从自然界中抽象出利用2维细胞自动机复制过程的逻辑序列,其中每个细胞有29种可能状态,他还解释了一个抽象的图案怎样能复制它自己.

们运行.然后它们开始在附近细胞的影响下进行它们的演化.从它们产生的图案,能显示自我组织、自身复制和自相似的性质,从而能演示具有混沌、有序或复杂性的系统.人们惊奇地看见一个由离散对象组成的有限天地,这些对象描述着我们的物理、化学、生物、社会或哲学世界的财富.

数学……美极了，……只有最好的艺术能够表现它.

——B. 罗素[英国哲学家、数学家、逻辑学家，1872—1970 年]

数学与艺术宣言

一群现在已经很有名望的艺术家，曾经在 1936 年发表过一篇公开宣言，叙述数学对他们的艺术的影响，题为《维数宣言》，发表在《Revue N+1》上. 这些艺术家是谁呢？宣言的起草人是艺术家 Ch. 西拉托(Ch. Sirato)，签名的有 B. 尼科尔森(B. Nicholson)、A. 考尔德、V. 维多夫罗(V. Huidobro)、卡卡巴哲(Kakabadzé)、科布罗(Kobro)、J. 米罗(J. Miró)、莫霍伊-纳吉(Moholy-Nagy)、A. 佩得罗(A. Pedro)、阿尔普(Arp)、P. A. 比罗(P. A. Birot)、C. 布赖恩(C. Bryen)、R. 德洛奈(R. Delaunay)、C. 多梅拉(C. Domela)、M. 杜尚(M. Duchamp)、W. 康定斯基(W. Kandinsky)、F. 卡恩(F. Kann)、科查尔(Kotchar)、N. 内格里(N. Negri)、M. 尼森(M. Nissim)、Fr. 皮卡比亚(Fr. Picabia)、普朗坡里尼(Prampolini)、普林内(Prinner)、拉塔曼(Rathamann)、Ch. 西拉托、S. 德洛奈(S. Delaunay)，以及 S. T. 阿尔普(S. T. Arp).

为什么要发表宣言？由于高维数学、相对论和非欧几何的光芒，使艺术领域萌发了一些新的观念，从而促成了这篇《维数宣言》.

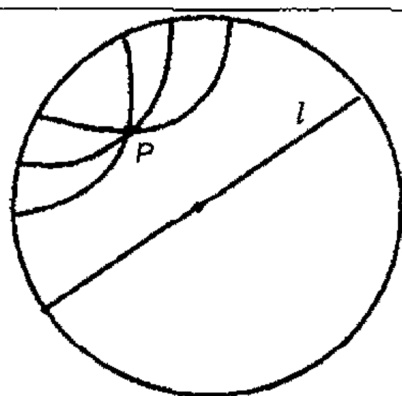
在宣言里说：

对于世界的一种新颖认识，使多种艺术形式打破沉寂，孕育生机，……砰然心动. 它们各自向着一个新维发展[1 维变 2 维，2 维变 3 维，3 维变 4 维]. 它们分别找到了自己对于下一个较高维的固有表达方式，将这种基本改变从思想深处的结论化为客观表现. 因此，构成主义者将致力推动以下趋势：

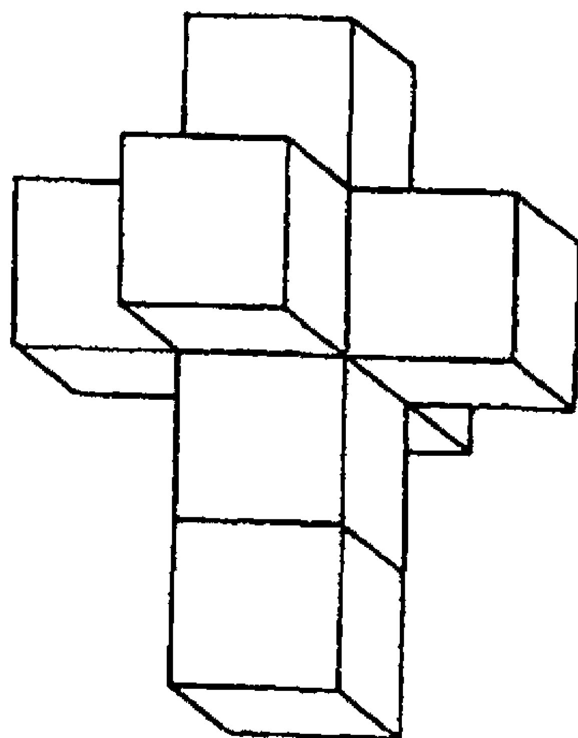
1. 文学 摆脱直线，向平面铺开……

2. 油画　走出平面，去占领空间：空间中的油画、构成主义、空间构成、多媒体复合.

3. 雕塑　舍弃封闭的、不动的和死板的空间，即欧几里得三维空间，去努力用艺术表现明可夫斯基的四维空间.



在庞加莱的双曲几何模型里，过点P可作无穷多条直线．图中过P的这些直线都不与直线l相交．



高维对象（例如展开的超立方体）、非欧几何、以及表示时间的维，影响了发表这份宣言的艺术家和许多后来的艺术家们的艺术．在达利的作品《十字架》(1954年)中，出现了展开的超立方体．双曲几何世界出现于M.C.埃舍尔的木刻画《圆极限1》(1958年)，拓扑学的橡皮膜几何见他的《阳台》(1945年)．

如果一位旅行者在过桥之前坚持亲自检查桥的每一部分是否牢固，否则决不过桥，那么他是走不远的；有些事情必须冒险，哪怕是在数学里.

——H. 兰姆［Horace Lamb，英国数学家，1849—1934 年］

数学走出迷宫

什么是有关迷宫的数学？如果某件事情是一个问题，那么它就有变成数学的潜在可能. 你可以回想步行哥尼斯堡七桥的趣题. 大多数人只把它看成一种解闷的有趣方式. 但是有一位数学家却把它看成一种逻辑的挑战，并且由此开创了一个全新的数学领域. 无论是设计迷宫或解答迷宫，都包含了逻辑的挑战. 的确，老鼠能学会解决和记忆它们走迷宫的方法. 会走迷宫的机器人也被设计出来了. 已经能够编制程序，利用计算机搜索所有可能解答，并且从中选择最有效的路径. 如今科学家们甚至利用化学波[1]和计算机，设计一种方法，加快计算机的解答速度.

几千年前，迷宫曾经具有神秘的重要历史意义. 迷宫曾被用于阻挡仇敌，囚禁人和妖孽，祈求神秘的或宗教的力量，供解答难题者消遣，或者作为房屋和花园的装饰.

熟知的迷宫有：

——［古代希腊］克诺索斯的拉比林斯迷宫和关于它的［囚禁牛头人身怪物］弥诺陶的神话；

——古代埃及复杂精美的迷宫监狱；

---

〔1〕化学波以均匀速度运动，并能无损耗地绕开障碍物，直到在终端消失. 利用计算机技术和上面这些性质，一群研究人员在美国西弗吉尼亚大学摩根城分校的 K. 肖尔特（K. Showalter）的领导下，发展了一种寻找迷宫最短路线的方法. 见 J. Kaiser, *Pathfinding Made Easier by Chemical Waves*, *Science News*, February 11, 1995.



在美国加利福尼亚州旧金山市，米娅·孟露(Mia Monroe)在格雷斯教堂的迷宫里散步.

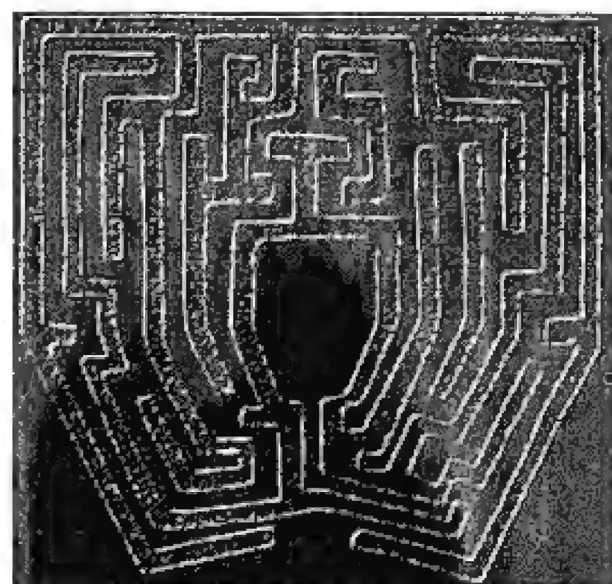
——赛马迷宫和牧羊迷宫(用石头垒出轮廓)，用于赛跑；

——教堂迷宫，在大教堂的地面上用石头铺成；

——在众多具有不同文化的不同地方，发现了许多石头堆成的迷宫设计，经历了几千年风霜雨露的侵蚀；

——17 世纪的篱笆和灌木墙迷宫；

——现代公园里的休闲娱乐迷宫.

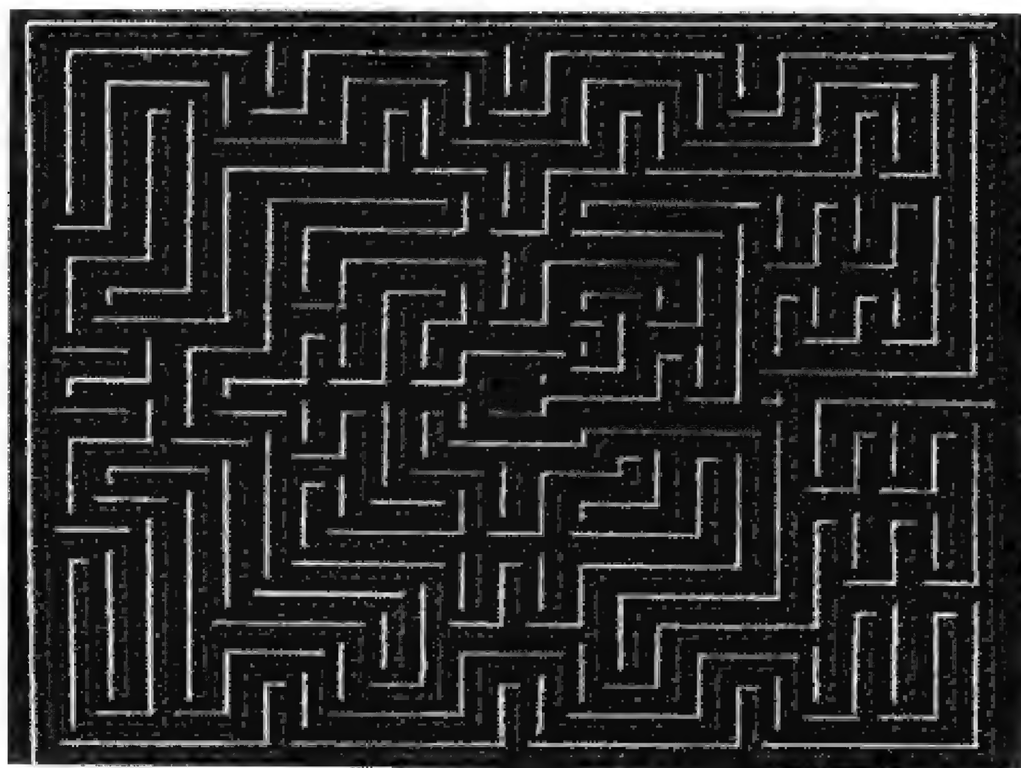


美国弗吉尼亚州威廉斯堡州长住宅里的庭院迷宫

这些难题的魅力，继续激起人们的兴趣. 不分老幼，一如既往，陶醉于探索迷宫的挑战，书店里可以看到很多关于迷宫的书籍. 目前有许多教堂正在重新探究走迷宫时的精神状态和思考方式. 美国加利福尼亚州旧金山的格雷斯教堂就是一个引人注目的例子.

不用担心！对于我们这些只想试闯迷宫、不求甚解的人，或者没有途径用计算机或训练老鼠走迷宫的人，法国数学家M. 特雷默

(M. Trémeaux)[2]设计了一种普遍适用于任何迷宫的傻瓜解法.



在法国圣奥默的圣柏林教堂发现的迷宫图

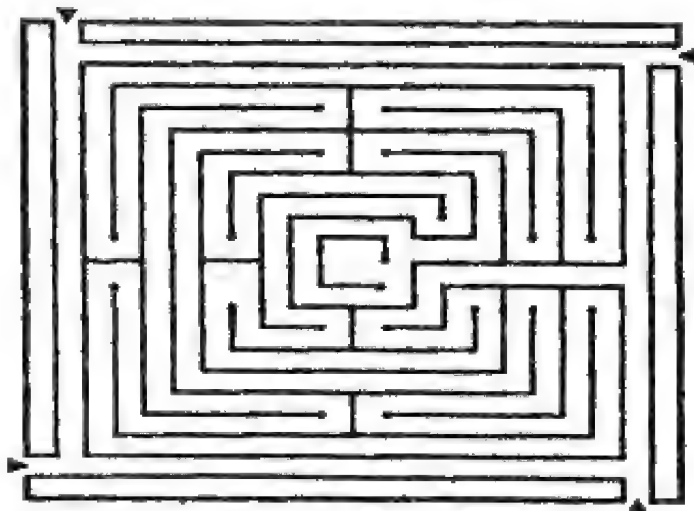
方法是这样的：

(1)当你在迷宫里行走时，自始至终，不停地在所走道路的右边画线.

(2)每当你到达一个新的叉路口，走你喜欢的任何一条路.

(3)如果在你的新路上，你来到一个旧的叉路口，或者路的尽头，那么转身从你来时的路返回去.

(4)如果转到一条旧路上，遇见一个旧的叉路口，那么只要有新路，就走新的. 倘若没有新路，只好继续走旧路.



1664 年 G. A. 布克勒《建筑珍品》中的庭院迷宫

(5)两边都被画线做过记号的路，不要再走.

这个方法不能保证走最短的路程.

---

[2] 见 E. Lucas, *Récreations Mathématiques*, Paris, 1883 vol. I, part iii, pp. 44 ff. 又见 G. Tarry, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1895, series 3, vol. XIV, pp. 187—190.

你可以自己动手尝试这些迷宫中的一个，或者全部.

另外有一种不能保证正确的走迷宫方法：走在迷宫里，始终保持用同一只手接触墙壁(总是用右手，或者总是用左手).



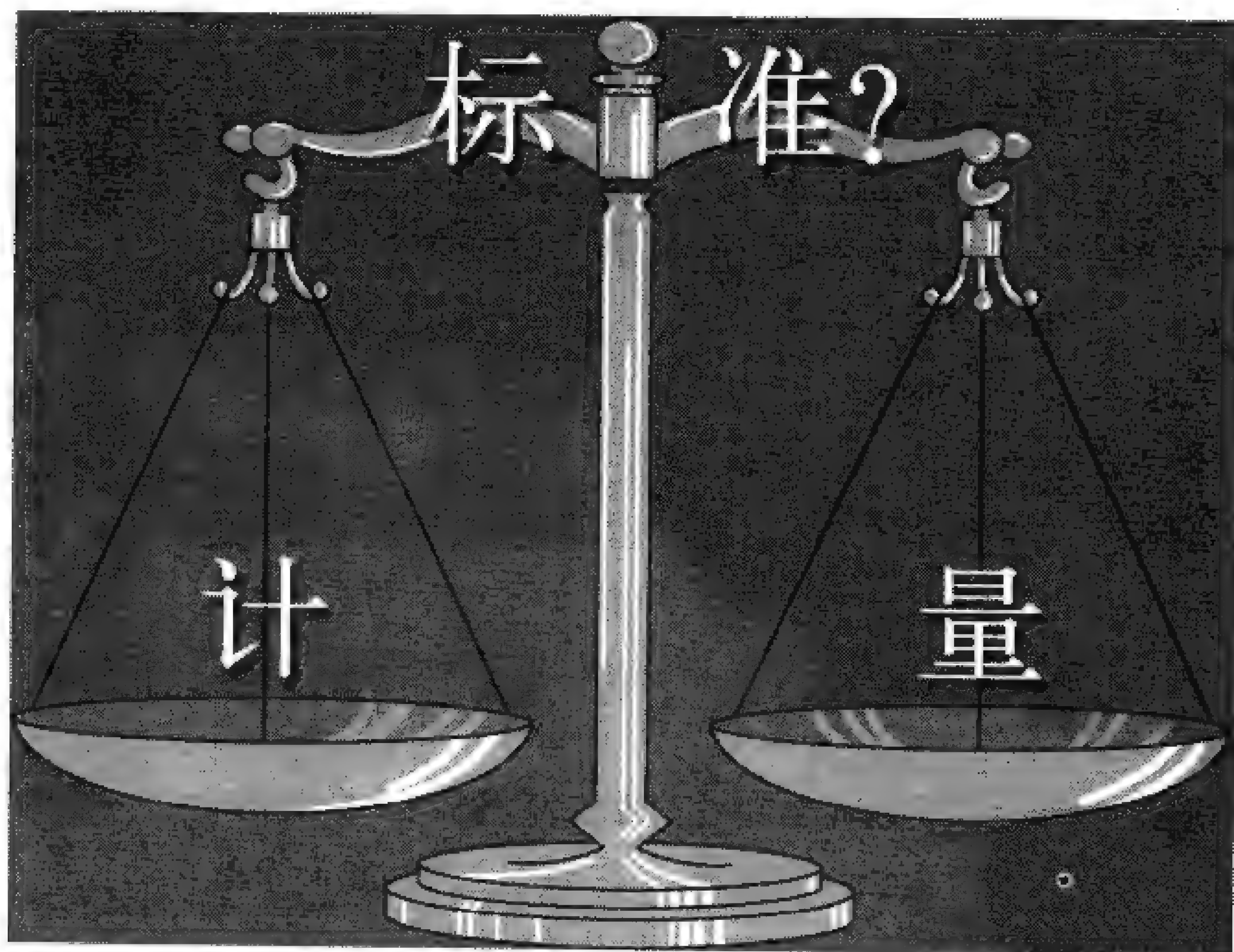
著名的拉比林斯迷宫，位于希腊克里特岛的克诺索斯.

科学总是出错;它为了解决一个问题,经常需要提出十个新的问题.

——萧伯纳[George Bernard Shaw,英国戏剧家、评论家,1856—1950 年]

计量单位今昔

在数学里,许多事物是任意的——例如表示数的符号,数系采用哪一种进位制,给术语下定义时随便使用未定义术语,数轴的长度单位,以及计量的单位.



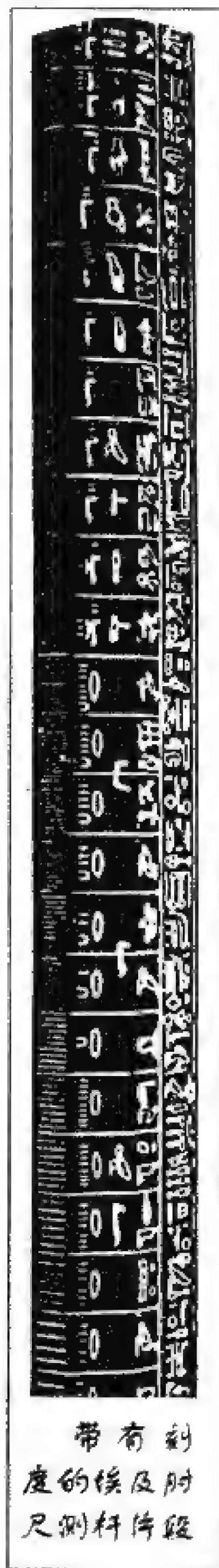
距离(长度),计量单位有:米、码[=0.914 4 米]、弗隆[=201 米]、里格[=4.8 千米]、哩[英里]、英尺、肘尺、掌、步、……

质量(重量),所用单位有:吩[=1.296 克,药剂衡量单位]、克、谷[=0.064 8 克,一粒谷物的重量]、盎司[美制 1 盎司=28.35 克]、磅[=454 克]、千克、……

温度，可表示成华氏度、摄氏度、开尔文度[绝对温度]、……

体积(液体)，测量单位有：夸脱、公升、杯、……

时间，测度单位有：秒、小时、天、年、月、毫微秒[十亿分之一秒]、……


带有刻度的埃及肘尺测杆片段

由于计量单位可以任意指定，它们的演变历史已经长达几千年. 从古代开始，就在世界各地发展起不同的计量单位系统. 例如，巴比伦人和埃及人发展的计量系统，希腊人和罗马人继续使用，而中国和其他亚洲国家则有它们自己的计量系统.

一些最早的测量工具，是以人类身体的某些部分为依据，例如，埃及人定义了一种肘尺，规定为从肘部到中指末端的距离. 希腊人用脚的长度作为他们的主要测量工具["脚"＝英文中的 foot＝后来的"英尺"]. 罗马人用步长来表示长度，这里的"步长"等于走两步的长度. 自然，这些测量工具，人皆有之，但是量出的长度数值却因人而异. 终于有一天，古代世界制订了统一标准. 埃及人规定了两种标准的肘尺，一种叫做皇家肘尺，长约 20.59 英寸(约 52 厘米)，另一种叫做短肘尺，长约 17.72 英寸(约 45 厘米). 埃及人甚至制造了金属的皇家肘尺和短肘尺，并在尺上用刻度细分为掌和指[1]. 对于计量标准化的一大贡献，来自于古代罗马法律，它要求罗马帝国的所有各地都应采用罗马单位[2]. 但是，一旦统治权力改变，计量标准系统也随之变化. 随着罗马帝国的没落，地区、城镇，甚至行会，纷纷采用了它们自己的标准和单位. 许多英制单位来源于中世纪产生的单位——英亩、

[1] 一肘尺被分成七个较小的单位，叫做掌，就是人手的宽度. 一掌分为四指，即手的四个指头(拇指除外).

[2] 古代罗马人采用 12 进制，将 1 脚[1 英尺]分成 12 部分[12 英寸]. 重量采用古代罗马单位"磅"(libra，缩写为 lb.，现在用来作为英制"磅"的缩写)，5 脚等于一步，而 1 哩则是 1 000步(即 5 000 脚).

弗隆、杆[等于 5.5 码或 16.5 英尺，约 5.03 米]、码. 在这期间，尤其在展销会上，一些标准获得了商人们的认同. 1215 年颁布英国大宪章，建立谷物和酒类的计量标准，迈出了统一步伐. 600 多年以后，1824 年，计量法令尝试清除长久以来形成的所有差异. 正如从前罗马帝国的计量系统曾经变成标准那样，现在英帝国的计量系统广泛流传到它的殖民地. 但是差异卷土重来，因为英国对英制又作了新的修改，而它的殖民地却没有同步变化. 直到此时，计量系统主要由商人和非专业人士建立. 第一次大规模用科学方法研究计量，发生在法国大革命结束的时候. 在 18 世纪后期，法国科学院被要求设计一种新的计量系统，结束当时所用计量单位混乱的局面. 1840 年，法国下令推行米制[后来被各国公认，成为公制].

kilo -	*hecto -*	*deka -*	*meter* *gram* *liter*	*deci -*	*centi -*	*milli -*
1 000	100	10		1	01	001

公制单位 meter(米)、gram(克)和 liter(公升)的常用前缀及其意义. 在附录中列举了更多的前缀.

米制是十进制系统. 米是它测量距离的基本单位. 它被定义成通过巴黎的经线在北极与赤道之间距离的 $\frac{1}{10\,000\,000}$. 为了测定重量，定义一克为在温度 4℃ 时，一立方厘米水的质量. 在这样的温度下，水的密度最大. 为了测量体积，定义一立方分米为一公升. 为了管理和保持米制标准，1875 年米制公约在法国[巴黎附近的]塞弗尔建立了国际计量局(IBWM). 此后，全球的科学界和大多数国家[3]采用了米制作为他们的标准[就是我们现在使用的公制]. 1960 年，IBWM 创造国际单位制(SI)，扩充了米制. 今天的计量标准，不再由皇帝或商人决定，而是根据科学需要. 更多的科学实验，需要更精细的准确度，对于新出现的领域，例如纳米技术，科学家正在重新修订标准. 那么，旧度量标准有什么

---

[3] 1988 年的美国联邦贸易法试图改用米制，不过美国人在日常生活中还没有使用米制.

新变化呢?

• 一米的长度,不再由收藏在法国塞弗尔国际计量局保险库里的铂铱米尺[4]上面两个记号之间的距离确定.现在的一米,是光[在真空中]在$\frac{1}{299\ 792\ 458}$秒时间间隔里走过的距离.

• 一秒钟也不再定义为一分钟的$\frac{1}{60}$,如我们大多数人知道的那样.秒已经被重新定义,作为铯[-133]原子[基态的两个超精细能级之间跃迁的]辐射周期的 9 192 631 770 倍的持续时间.

• 水的沸点曾经被认为是摄氏 100 度,但是通过利用分子运动代替水的性质,已将水的沸点修改为 99.97℃.

关于千克,有没有发生什么情况?它的重量,看来将会成为下一个候选的修订对象.到那时,将会同意不再把它作为保存在法国塞弗尔的铂铱圆柱体的重量.科学家们正在致力于一种能被普遍接受的方法,试图利用原子的重量、电学测量和量子物理学中的普朗克常数,将一千克的重量定义为关于原子的某个特殊的数.设立在美国马里兰州的国家标准和技术研究所,测量了与一千克相当的电磁力,并且正在找寻适当方法,希望能达到普朗克常数所需的准确度.另外一种正在探索中的方法,是计算一千克硅的原子个数.如果这样的方法能够实现,那么在不久的将来,会出现原子千克.

计量单位的数值变化将会到此结束吗?纵观历史,计量单位变革演化的例子比比皆是,所以不能指望演变过程戛然而止.

---

[4] 铂铱合金耐高温,抗腐蚀,不受化学反应影响,用它来制造国际计量局规定的标准长度和标准重量,长期保存,十分理想.因为在一定条件下,它的尺寸和重量能够保持原状.但是它毕竟也在变化,不管有多慢,所以它的重量和长度都随着时光流逝而受到微弱影响.由于科学家们需要越来越精确的测量,铂铱标准必须改变.

我曾看见……一个量经过无穷大，而将它的符号从正变为负.我曾确切地看见它如何发生.……不过，那是在晚餐以后，未予深究.

——W.丘吉尔[Winston Churchill 英国政治家、前首相，1874—1965 年]

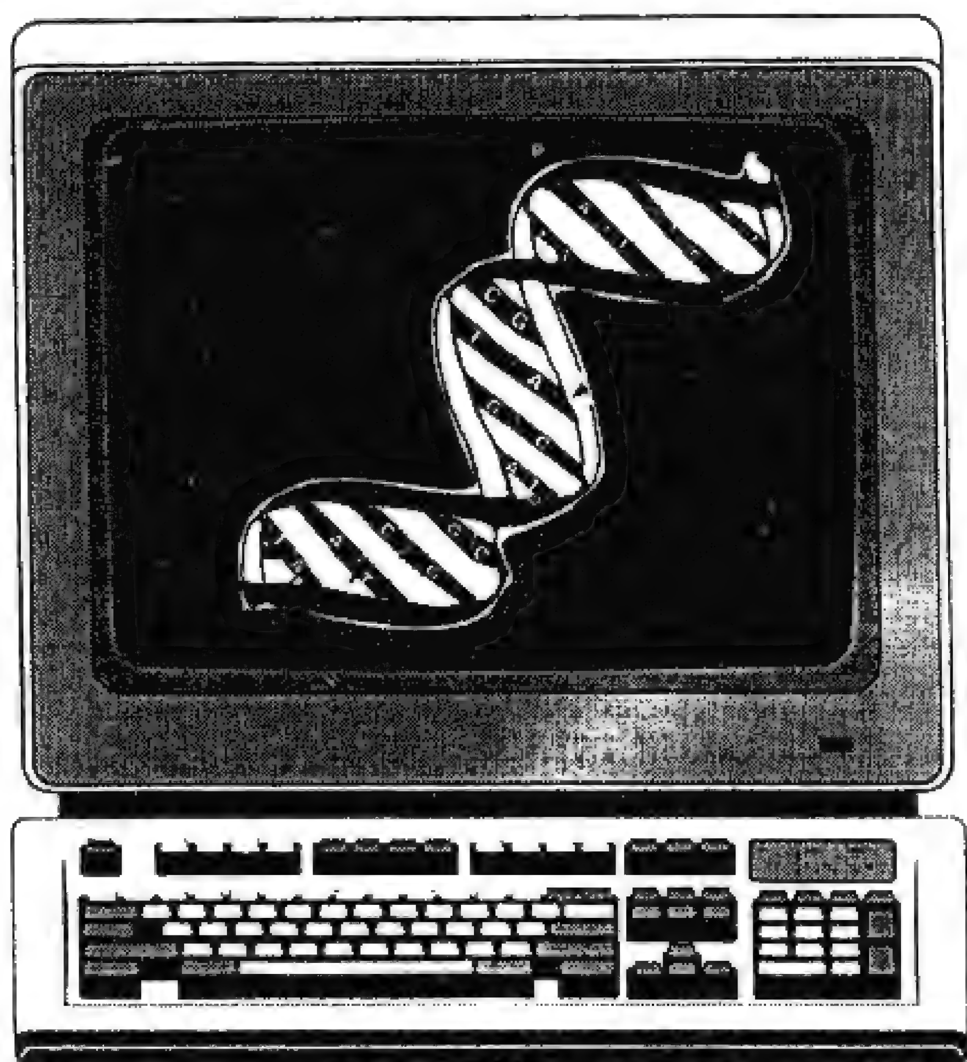
分子计算机

想象一台计算机，它比超级计算机快一千倍——每秒钟执行一万亿次运算.想象一台计算机，消耗的能量只有普通计算机的十亿分之一，而在相同指定空间里储存的信息量却提高到一万亿倍.哪里能找到这样一台计算机呢？这样的计算机居住在我们身体的细胞里，在 DNA[脱氧核糖核酸]里面.它们是分子计算机.虽然分子计算机至今尚未投入市场，但是，1994 年 11 月，美国南加利福尼亚州大学的计算机科学家 L. M. 阿德莱曼(L. M. Adleman)已经证明了它们的潜在可能性.阿德莱曼想要检验利用分子计算机解决数学问题的可行性，但是他有一些障碍需要解决.要检验什么类型的问题？怎样利用 DNA 的工作，拿出一种办法来，编制问题的程序，并且译出它的解？提出这样一项任务，然后探索如何解决它，可谓雄心勃勃.阿德莱曼考虑过一个问题，起初以为与哥尼斯堡七桥问题有关，其实是一个哈密尔顿道路问题[1].他决定选择一个只需利用传统计算机检查所有可能情形就能解答的问题.所选的问题是：求联结七个点的最短路线，其中有一个点指定为起点，一个点指定为终点.这个问题类似于一位旅客想要寻找从旧金山到

[1] 1857 年，W. R. 哈密尔顿(W. R. Hamilton)发明一种游戏，叫做周游世界.用一个正十二面体的 20 个顶点各自表示一个城市.游戏者沿着正十二面体的棱旅行，并且刚好访问每个城市一次.一条通过每个顶点刚好一次的道路，叫做哈密尔顿道路.如果这条道路的终点与它的起点重合，那么把它叫做哈密尔顿回路.对于哥尼斯堡七桥类型的问题(其中的路线称为欧拉回路)，路线必须恰好通过每座桥一次，而每个顶点可以根据需要通过多次.哈密尔顿道路不必走过每一条棱，但是每个顶点必须恰好访问一次.

罗马的最短路线,不过沿途必须在五个其他指定城市各停一次.你如何告诉DNA解决这样一个问题呢?

阿德莱曼给每个城市分配一个DNA姓名.利用DNA的四种核苷酸,即A、C、T和G,每个姓名都由以上四个字母的适当重复排列组成,10个任选字母组成的序列为名,10个为姓[英文习惯名在前,姓在后].举例来说,旧金山的DNA名和姓,可以利用四种核苷酸[2]的代表字母,分别任选10个,排成顺序ATTGACTCGC[DNA名]和CTGGAACGTG[DNA姓].然后将两城之间的班机利用城市的DNA姓名来命名.例如,从旧金山到迈阿密的班机的名称,利用旧金山的DNA姓和迈阿密的DNA名.此外,由于这些核苷酸成对互补(A与T,C与G),互补的两种,趋向于用一种特殊方式结合,所以阿德莱曼对于每个城市指定了补名,以便配对.每个城市的DNA姓名,每趟班机,以及每个补名,都是DNA中的核苷酸串.然后将所有这些DNA串放进一个试管混合.每个DNA班机串立刻开始连接到它的城市,并且开始形成DNA的万亿长链.这就意味着,分子计算机正在工作.霎那间,所有可能路线都在分子解中形成了.在这些链里面,有一个具有正



[2] 核酸由核苷酸组成,而核苷酸则是由戊糖、磷酸和碱基连接成的化合物(共有五种碱基,各用一个字母表示:腺嘌呤,记为A;胞嘧啶,记为C;鸟嘌呤,记为G;胸腺嘧啶,记为T;尿嘧啶,记为U).在DNA[脱氧核糖核酸]中,只出现四种碱基A、C、G和T.碱基两两配对(A配T,G配C),在DNA中,两串核酸用它们的碱基联结在一起,形成双螺旋.

确的出发城市和正确的目标城市，还加上另外五个城市，并且长度是最短的. 运用分子生物学的现有实验室技术，阿德莱曼能在一星期左右的时间内，在解中分离出所需的 DNA 链. 因此，他创造了一种方法，利用 DNA 分子结合的性质解答数学问题. 他的设计，用了四个 DNA 的基本单位，来将问题翻译成计算机信息，并且予以解决，类似于传统计算机利用 0 和 1.

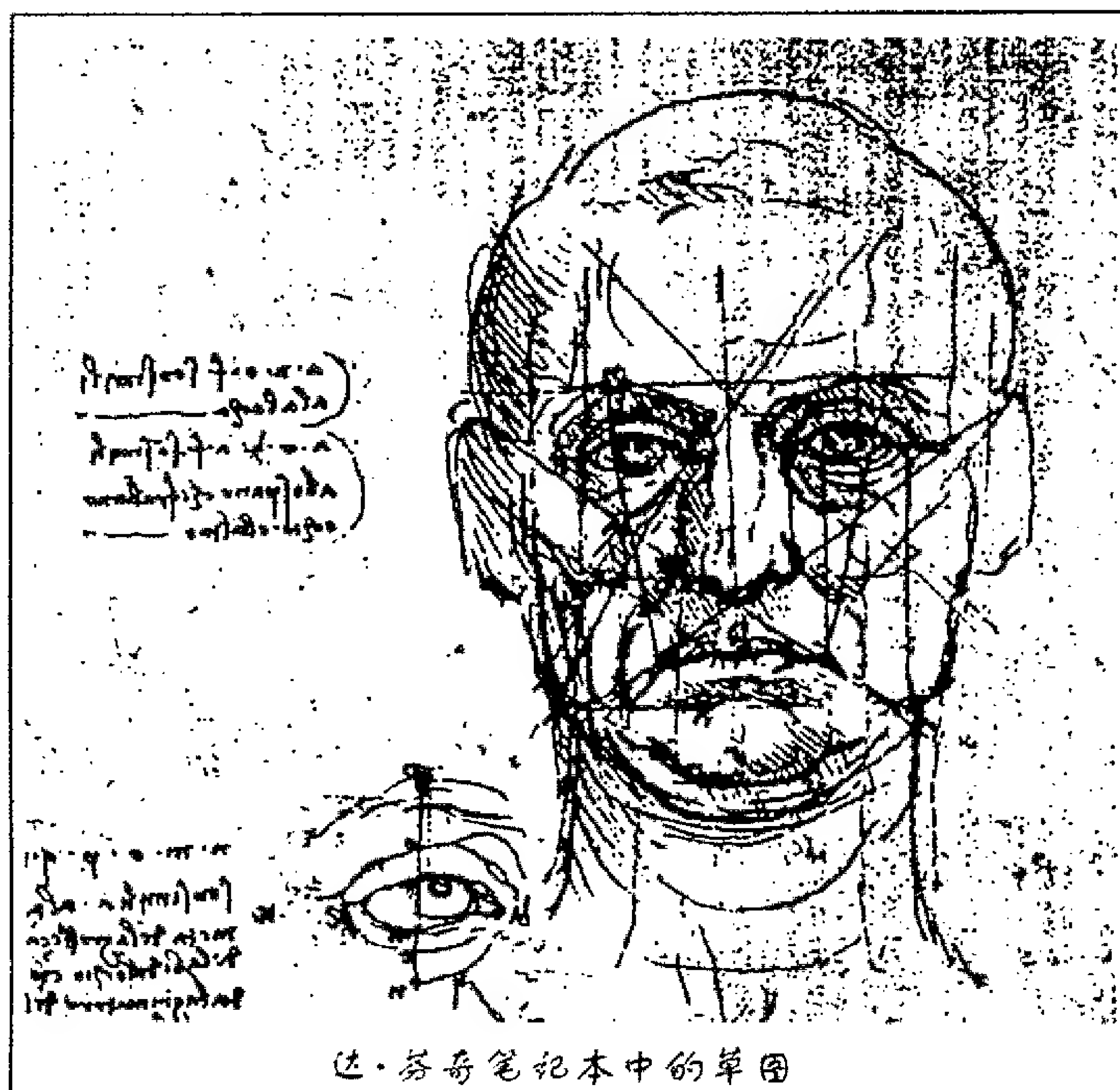
几千年来，已经发明的计算器具，其数量和种类足以证明人类的求知欲和创造性. 其中包括算盘、结绳、模拟式、数字式、微芯片等等. 分子计算机，又名为 DNA 计算机或生物学计算机，离我们并不遥远，尤其是当人们考虑到，DNA 和大脑能够多么容易地管理和监控身体的全部无穷无尽的功能. [中译本附记：根据 2005 年 1 月 6 日《科技日报》消息，以色列的魏兹曼研究院已经利用 DNA 制造成功世界最小的分子计算机，可用来鉴别癌症分子，进行癌症治疗，这为彻底治愈癌症找到了新的方法.]

世上万物遵循锥形、柱形和方形.

——塞尚[法国画家,1839—1906年]

从数学看塞尚的画

尝试寻找艺术作品的数学方面,有时可能显得勉强或肤浅.许多年来,艺术家们时常从技巧上和数学上分析图画,以求帮助他们达到一个特别的目标.例如,文艺复兴绘画的特点是作品的现实主义和精确性.为了达到这种效果,当时的许多画家在笔记中详细分析他们的作品和



达·芬奇笔记本中的草图

题材,他们的研究,集中到一点,就是利用射影几何学理解透视.画面上的物体位置、光线和形状,体现了画家想要表达的透视关系.为了增强理解,画家还研究人体的结构,包括观察实体和画图分析,研究它的解

剖学和每种可能具有的对称性[1]. 通过观察人体,将其大致分成一些基本几何形状,从而认识到怎样准确地将其再现出来. 因此,文艺复兴大师们注重他们作品的结构和现实主义,而对作品的技巧分析,又使画家们在作品的表现形式上获得新的认识和新的自由. M. C. 埃歇的作品说明了同样的事实,他的镶嵌装饰画,直到阐明数学背景以后,才获得普遍理解. 塞尚(1839—1906 年)的画,他自己没有分析过,但是许多艺术批评家仔细看过他的作品,并且将画面分割研究."如果一个人知道怎样画出圆锥、正方体、圆柱和球的形状,画出它们的面,他就应该知道怎样画油画",上面这段话概括了塞尚对于艺术的分析. 但是,看看塞尚如何观察空间,会有一种数学的陶醉.

塞尚的作品,并不注重表达现实主义,而是改为关注一个完全不同的艺术方面. 他被视为空间的组织者. 文艺复兴的空间与塞尚的空间有什么差别呢? 在欧几里得几何里,空间是所有点的集合. 当文艺复兴画家(在画布上)将一个对象置身于空间中,配上有关的透视风景,在这种意义上,空间是陪衬,仅仅是被用来展示所画的题材. 塞尚提出了一个关于空间的完全不同的概念. 在他的作品里,空间被视为一个整体,作品的题材只是一部分. 对他而言,题材占据空间中的一个点集,而这个集合的补集(即空间的所有其他点)也是他的作品的主题. 他用空间自己的主体(结构)来发展空间,而将对象的结构有时轻描淡写地陈述为它融合在环绕它的空间里. 所以,空间和对象融为一体,形成整个空间——用这种方式形成完整的作品. 线条有了一种新的感觉. 它不再是理想的欧几里得的线——笔直的、清晰的和连续的. 相反地,他的线条时常画成断缺的、不直的、干枯的. 他有时扭曲透视,仿佛人们期待找到椭圆几何的非欧世界. 他的《静物与水果篮》说明:

——"神圣的"欧几里得直线怎样不再是直的,而且逐渐淡化的(注意前面桌子边缘的线条);

——空间的深度如何被扭曲,但是通过在画面上剪裁掉家具的一

[1] 达·芬奇的《Trattatto》和 A. 丢勒的《Treatise》对于人体比例的研究,都是这种分割考察的例子.



塞尚：静物与水果篮(1888—1890 年)，法国巴黎奥尔赛博物馆.

部分，仍能显示空间的无限性；

——创造了空间中的多点透视(篮柄的平面隐含一个透视，壶柄指出另外一个方向，墙角和桌子的位置显示出其他的透视)，并且产生了一个宽阔的视觉范围.而且，正如已经说起的那样，在这个空间里，所有对象似乎都具有同等的重要性，水果、篮子、茶壶、椅子、桌子、楼板，全部融进一个单独的整体.

塞尚的其他绘画技巧广为人知，尤其是利用鲜艳色彩产生立体感，不过他对空间及其深度的表现和组织，具有特别的数学重要性.

所有科学都需要数学.

——R.培根[英格兰哲学家,约1214—1294年]

我在哪里?

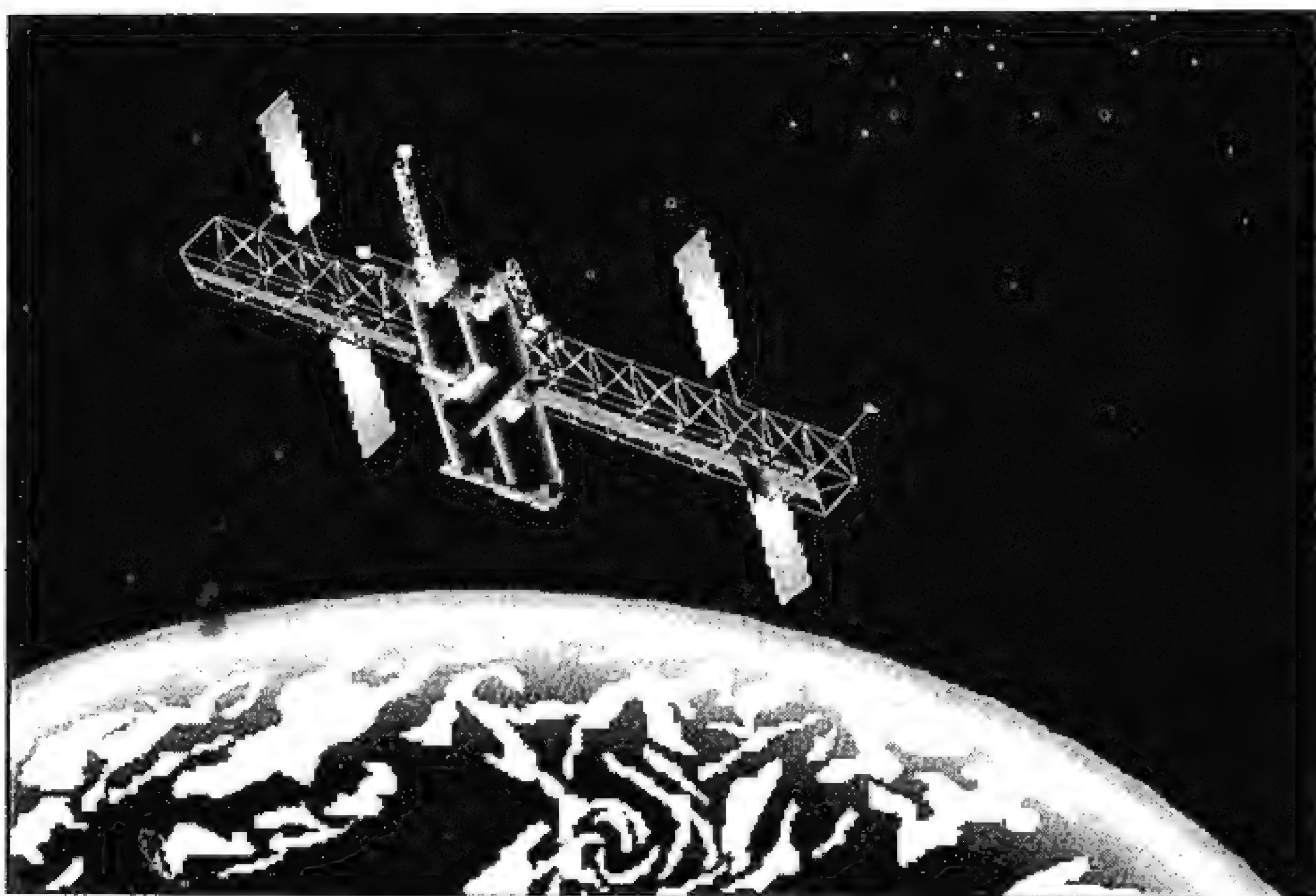
——数学与卫星定位系统

1996年3月29日,美国克林顿(Clinton)总统签署了一项总统决策命令,允许居民和商人使用卫星定位系统(GPS).签署时,运输部长F.培尼亚(F. Peña)指出,"今天,美国人中知道什么是卫星定位系统的,为数不多.从现在起,五年以后,他们将不知道,倘若没有这种系统,他们将怎样生活."

卫星定位系统由美国国防部发展和操作,1978年开始研究,到1995年7月17日,已经具备满负荷操作能力.它是以人造地球卫星为基础的一种无线电导航系统.24枚人造卫星,分布在地球上空的六条圆形轨道上.它们的位置安排,使得在任何时间,全世界的任一用户,总能至少看到六颗人造卫星.这些人造卫星不断地向地面控制部播报它们的位置和时间,让它及时处理和更新每颗人造卫星的航行资料信息.这些人造卫星的作用,是给任何能接受到它们讯号的人拿来作为精确参照点.用户们得到这种信息以后,可以确定他们的精确位置、速度和时间.

卫星定位系统怎样工作呢? 卫星定位系统[1]可以运用人造卫星之类的现代技术、现代通讯系统,以及原子时钟,其同步程度达到十亿分之一秒;但是,要能找到装备收发装置的一条船、一辆卡车或任何人或物的精确位置,仍需依靠三角测量的老办法.三角测量是古时候船员航海和旅客在陆地旅行所用的方法.它以几何学和三角学的概念为基

[1] 卫星定位系统提供一个标准定位服务(SPS)给公众使用,还有一个加密精确定位服务(PPS),主要给国防部使用.为了安全原因,SPS精确性略差.



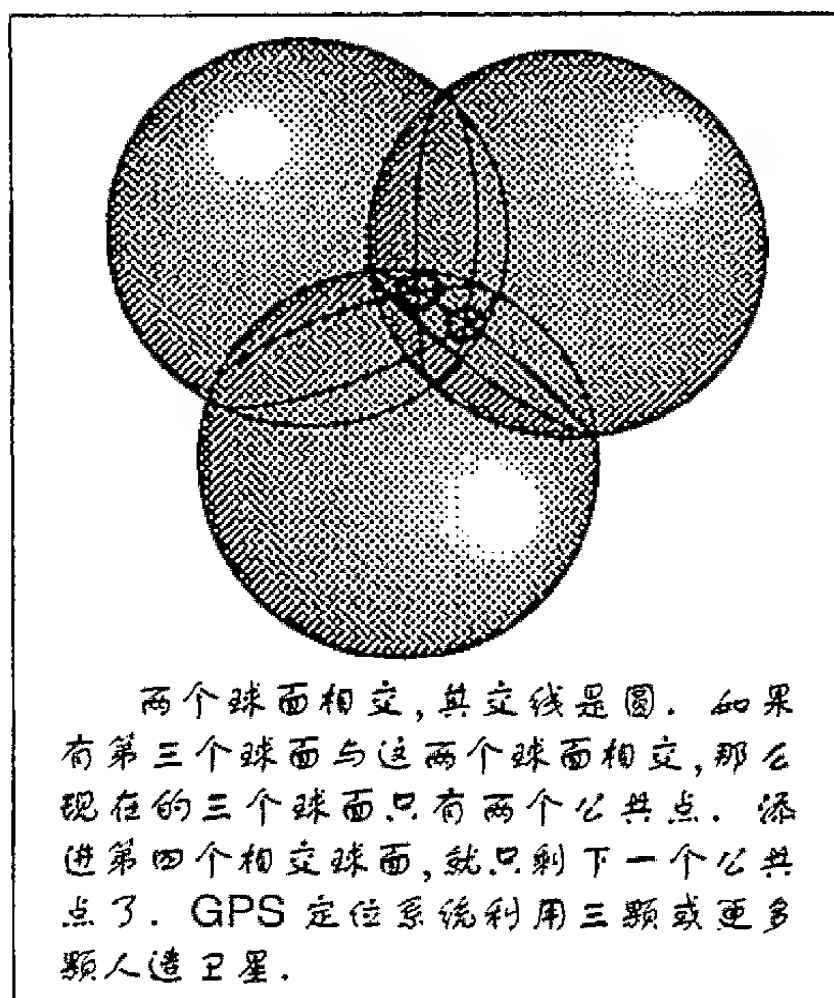
础.举例来说,如果只知道一个三角形的一条边和两个角的大小,那么其他边和角都可以确定[2].

如今用户到空间一组人造卫星的距离可以迅速测定.车辆要能与人造卫星通讯,必须配备收发装置,用来发射讯号和接收来自卫星定位系统人造卫星的讯号.

为了确定一辆失踪汽车的位置,至少需要三颗人造卫星各自搜寻到与对象的距离.设想每颗人造卫星是一个球面的中心.大家知道,球面是空间内所有到一定点距离相等的点的集合,定点叫做球的中心.

每一颗人造卫星装备了四台原子时钟(一台是主钟,一台是后备,另外两台保持与前两台同步).在每一瞬间,每颗人造卫星的位置由三个坐标决定——高度、经度和纬度.为了确定汽车的位置,每颗人造卫星首先利用公式"速度×时间=距离",确定它到汽车的距离.这里显示出原子时钟的重要性.当人造卫星收到一个讯号时,那个讯号带有发送

[2] 知道三角形的任何两个角,容易算出第三个角.因为根据欧几里得几何,我们知道,三角形三个角的总和等于180°.现在我们知道了三角形的三个角及其一边的长.为了求两条未知边中的任何一条,我们可以利用三角学的正弦定律.



两个球面相交，其交线是圆. 如果有第三个球面与这两个球面相交，那么现在的三个球面只有两个公共点. 添进第四个相交球面，就只剩下一个公共点了. GPS 定位系统利用三颗或更多颗人造卫星.

它的时间记录，人造卫星又注意到接受讯号的时间. 然后卫星定位系统软件计算两个时间(发送时间和接受时间)的差. 例如，可能这个差是 0.09 秒. 讯号的速度等于光速，大约每秒 186 000 英里(约 300 000 千米). 因而汽车到这颗人造卫星的距离等于 186 000×0.09(即速度×时间)，也就是 16 740 英里(约 27 000 千米). 在三维空间里考虑，这意味着汽车此刻可能位于空间中距离卫星 16 740 英里远处的任一点. 用这种方法算出三颗人造卫星各自到汽车的距离.

现在设想，在这些人造卫星周围各有一个想象中的球面，卫星是球的中心. 由于每个球面的半径分别是相应卫星到汽车的距离，所以对于一颗特定的人造卫星，位于想象球面上的点，表示汽车在空间中的一切可能位置. 这三个球面只能相交于两点. 那两点中，一个点是汽车的位置，另一点大概不在地球上了. 卫星定位系统软件完成这些计算，可能只要短短几秒钟.

卫星定位系统可以应用于交通管理中心、公共汽车、火车和紧急反应系统. 在航空、公路、海运、卡车运输、铁路运输和公共交通的指导系统中，卫星定位系统将会成为它们的基础. 现在它甚至在一种个人水平上提供指导——从荒郊探险，到为盲人指路.

培尼亚部长在他的演说中指出，"这种新工业的诞生，将会完全改变我们的生活方式，从开车上班，到递送包裹，乃至对紧急情况作出反应. 卫星定位系统将会对日常生活产生深远影响，节省人的时间，降低成本，并且给人们带来前所未有的灵活性和选择机会."[中译本附记:

2005 年 12 月 16 日《扬子晚报》有一段新闻,题为“卫星追踪盗车贼”,说的是安徽省阜阳市祁先生新买的一辆汽车被盗,依靠车内安装的 GPS 卫星定位系统,十个多小时以后,就找回了自己的车. 这是利用卫星定位系统的一个有趣的新例子.]

我将坚持，直至我找到某件事情是确定的，——
或者至少，直至我能确定没有事情是确定的.
——R. 笛卡尔[法国哲学家、数学家，1596—1650 年]

文学中的数学

大多数人想到数学时，头脑里出现数、复杂的方程和图表. 数学总是被链接到科学. 当我们想起数学书的时候，我们不会想到小说，虽然数学本身就是一部精彩的小说. 它的观念和概念都带有想象和虚构成分. 在欧几里得几何学中，点、直线、平面，都包含想象. 在我们的世界里，不存在它们的理想形式. [环顾四周，哪里能找到有位置无大小的点、有长无宽的线和没有厚度的面呢?]同样地，正方形、三角形和圆，也都包含想象. 当然，我们能看见画在纸上的正方形，但在实际上，无法将它的四个角都画成完美的直角，也不可能画得使它的四条边长百分之百地相等. 我们知道，数学上可以畅通无阻地把一个圆分成 360°，也能随心所欲地在一条直线上选定原点，从而把它变成数轴. 数学的对象，在我们看来，似乎实实在在，尤其是当我们利用它们去描述周围事物的时候. 在温度或预算赤字中应用负整数，觉得它们很实在. 分形被应用到拍摄电影，当它们变成影片里的风景，看上去很实在. 在《星际旅行》、《接触》、《星球大战》这样一些作品中出现的最新数学概念，我们毫无疑问可以接受，但是，有关文学的数学概念，想过多少呢? 数学概念确实已经在许多小说作品里发挥作用.

索然无味的统计、概率和复杂性理论，在 R. 科特斯的短篇小说《规律》里，起了主要作用. 在这里，我们读到："在从七点到半夜的时间里，桥上通常无声无息. 但是在那个晚上，似乎这座城市里的所有驾车人……协商一致，推翻传统."这篇小说讲的是当一些事情出乎预料时发生的情况——有一天，由于意外交通堵塞，许多顾客挤进一家特别的商

店，它本来将会在第二天倒闭．科特斯在小说里讲的是平均律，但是从今日数学观点来看，这个故事也是复杂性理论的一个奇妙例子，又是个在有序与混沌之间微妙平衡的例子．

在长篇小说《爱因斯坦之梦》里，A. 莱特曼（A. Lightman）从事一项技术复杂的工作，有许多玄妙想法，梦见爱因斯坦正在阐明他的时间和相对性的理论．跳过书中各种哲学议论，你在不知不觉中学习了爱因斯坦的理论，这些理论是小说情节的背景线索．有一章里，梦中想象时间沿着圆周运动，故事结尾的小节写道：

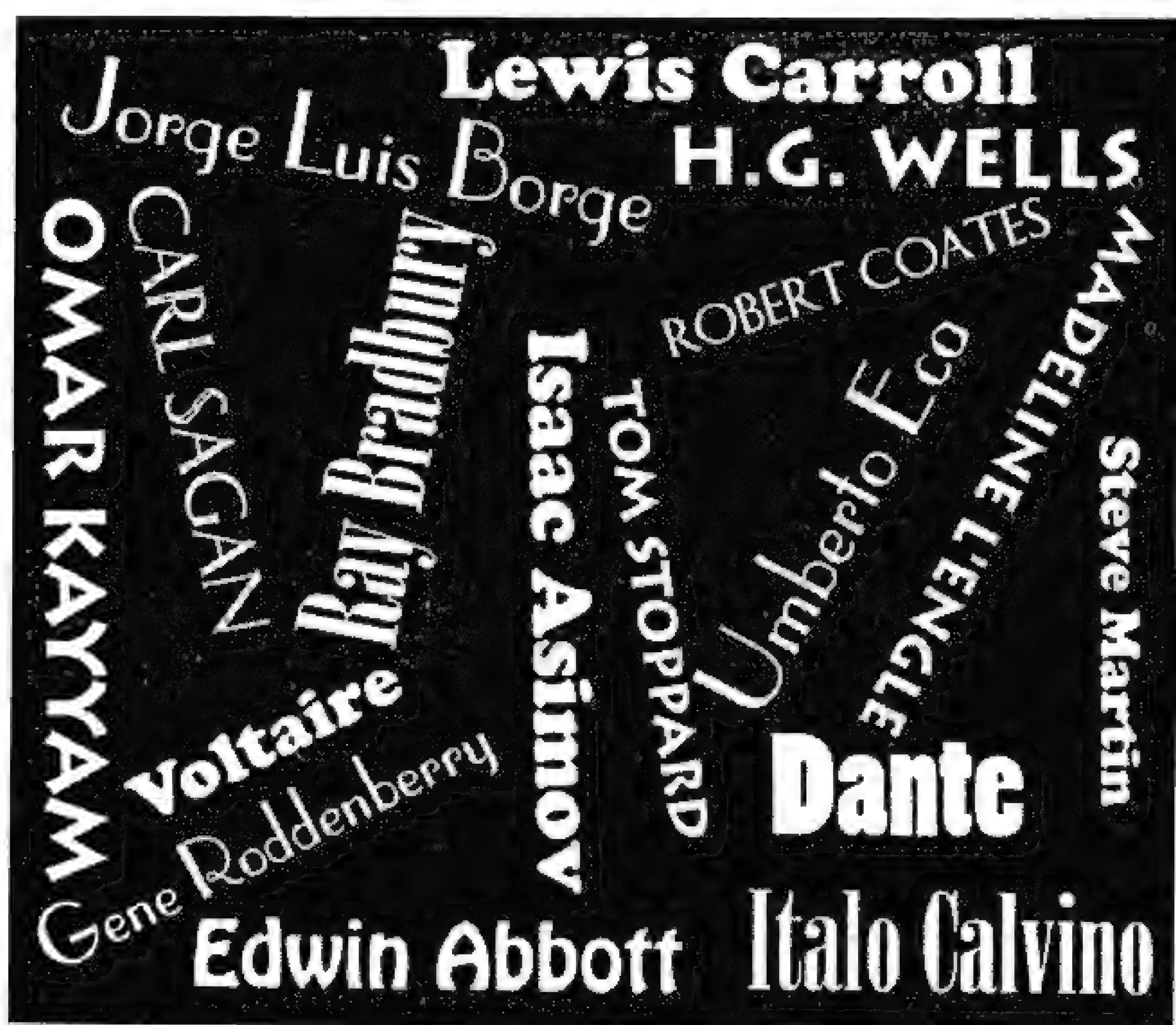
"夜深人静时，这些倒霉的市民无法入睡，将他们的被单扯来扯去，他们感到烦恼，因为知道他们不能改变一个单独的动作，一个单独的姿势．今生今世，他们将会精确地重复前世的错误．这些二茬罪的唯一征兆，就是时间在循环．在每个城镇里，尽管夜已深沉，空荡荡的大街和阳台上，依然充满了他们的呻吟．"

U. 埃柯（U. Eco）的大部分小说，如《玫瑰的名字》、《傅科摆》和《昨日之岛》，把数学概念编进故事，在现实主义的情节里，添枝加叶．在《玫瑰的名字》里，编码和密码扮演重要角色．《傅科摆》的前面几行是：

"那是我看见摆的时候．从教堂唱诗班席位的天花板上，垂下一根很长的金属线，线的下端悬挂着一个球，它往返摆动，每趟来回的时间精确地相等．有人或许觉得它不可思议，居然像平静的呼吸那样均匀，但我知道，金属线长度的平方根和圆周率 π，这两个定值保证了摆动周期为常数．……"

这样的数学措辞，给他的作品增加了可信度，并且揭去一片神秘面纱．

在 J. L. 博尔赫斯（J. L. Borges）的短篇小说《沙书》里，主要人物获得一本难以置信的书，没有开头，也没有结尾．"它不可能这样，但它就是这样．这本书的页数，不多不少，恰好是无穷大．哪一页都不是第一页，哪一页都不是最后一页．我不知道为什么它们的页号被编成这种任意方式．或许是在暗示，在无限序列中，项的序号可以出现任何整数．"这本无穷书和它暗示着什么，占据了小说主要人物的每一瞬间、每个想法．他明白，他必须摆脱这本书，否则它将耗尽他的一生．自然，他不能



把它撕成碎片,因为地球没有足够的房间,来存放这本无穷多页书籍的碎纸垃圾. 书中内容不仅涉及无穷大这一内容. 虽然它写作于 20 世纪初期,但是当我们今天读它的时候,我们会情不自禁地想起递归程序和分形,以及分形能在我们眼前生长和变化的情形.

在最近几年中,T. 斯托帕德的剧本《世外桃源——阿卡迪亚》震撼了戏迷. 剧情跨越 19 世纪初期和现在,19 世纪的女主角(托玛西娜)是一位早熟的年轻女子,正在探究怎样能用数学描述我们周围的世界. 在一场戏中,她向她的老师挑战,说:

“每个星期,我为您的方程画图,一点又一点,它们的坐标 x 和 y 以各种代数关系互相联系,每个星期它们画出来都是普通几何图形,好像全世界的形状只有弧与角,别无其他. 天经地义,如果有一个方程的曲线像铃,一定有一个方程的曲线像蓝铃花,而且如果有蓝铃花,为什么没有玫瑰花? 我们相信大自然是用数写成的吗?”

她记录了一些具有革命意义的发现,可惜失传了. [剧本里说,180

年以后，在同一间房屋里生活着具有同样关系的一群人，]与她对应的现代角色是一位数学家，正在研究复杂性理论和混沌理论——在这里，这些概念依旧是布满曲线图形的元素.

最后，考虑 R. 布拉德伯里（R. Bradbury）的短篇小说《雷声》. 小说里的人物，在一次休闲旅行中，遭遇意外，结果不幸身亡. 这里发生的，是一次蝴蝶型突变式的死亡，“打破平衡，碰倒一行小骨牌，倒下的小骨牌碰倒了较大的骨牌，如此继续，最后碰倒了巨人似的庞大骨牌，差之毫厘，谬以千里. ……事态无法改变. 杀死一只蝴蝶不要紧！对不对？”在混沌理论中描述了一种蝴蝶效应[1]，起步时的简单细微差异，可以造成结局大不相同，这篇小说是否是蝴蝶效应的先驱呢？

数学也已出现在许多电影剧本里. 例如，考虑以下几部电影，它们的剧本都涉及数学题材和观念.《骄阳似我》（英文片名为 Good Will Hunting，又译为《心灵捕手》）曾获得 1997 年[第 70 届]奥斯卡最佳原创剧本奖. 1998 年的电影《死亡密码》（英文片名 Pi，又译为《数字漩涡》或《圆周率》），故事讲的是一位天才利用数学解释生活大画图及其意义[发现并破译扰乱股票市场的幕后数学程式]. 在 1980 年 J. 克莱伯（J. Clayburgh）的喜剧《那是我的琴弦响》中，证明了“蛇引理”. 在 1971 年的电影《稻草狗》中，正负号的转换给达斯丁·霍夫曼（Dustin Hoffman）带来了大麻烦. 1998 年出品的《怀孕的艾达》，向我们介绍了艾达·洛芙莱斯（Ada Lovelace）和她的世界. 而 1983 年的《月球背面的山峰》，则是讲述 S. 柯娃列夫斯卡娅（S. Kovalevsky）和另外一些数学家，例如 K. 维尔斯脱拉斯（K. Weierstrass）和 G. 米塔-列夫勒（G. Mittag-Leffler）.

这些作品，以及许多没有列出的作品，都很有趣，但更重要的是，它们是一块跳板，可以启迪人们的思想和探究数学的观念. 一件事情似乎总是会带出另外一件事情.

---

[1] 在混沌理论中，“蝴蝶效应”应用在与混乱天气变化有关的场合. 这就好像在世界某处有一只蝴蝶展翅起舞，使空气产生微弱振动，可能由此开始，引起连锁反应，结果在世界的另外一处形成了狂暴的飓风.

许多从来没有机会多了解一些数学的人，把它与算术混淆，以为它是一种枯燥无味的科学. 但在事实上，它是一种需要大量想象的科学.

——S. 柯瓦列夫斯卡娅[俄国女数学家，1850—1891 年]

治安与复杂性

"髋骨连接着脊椎，脊椎连接着……"

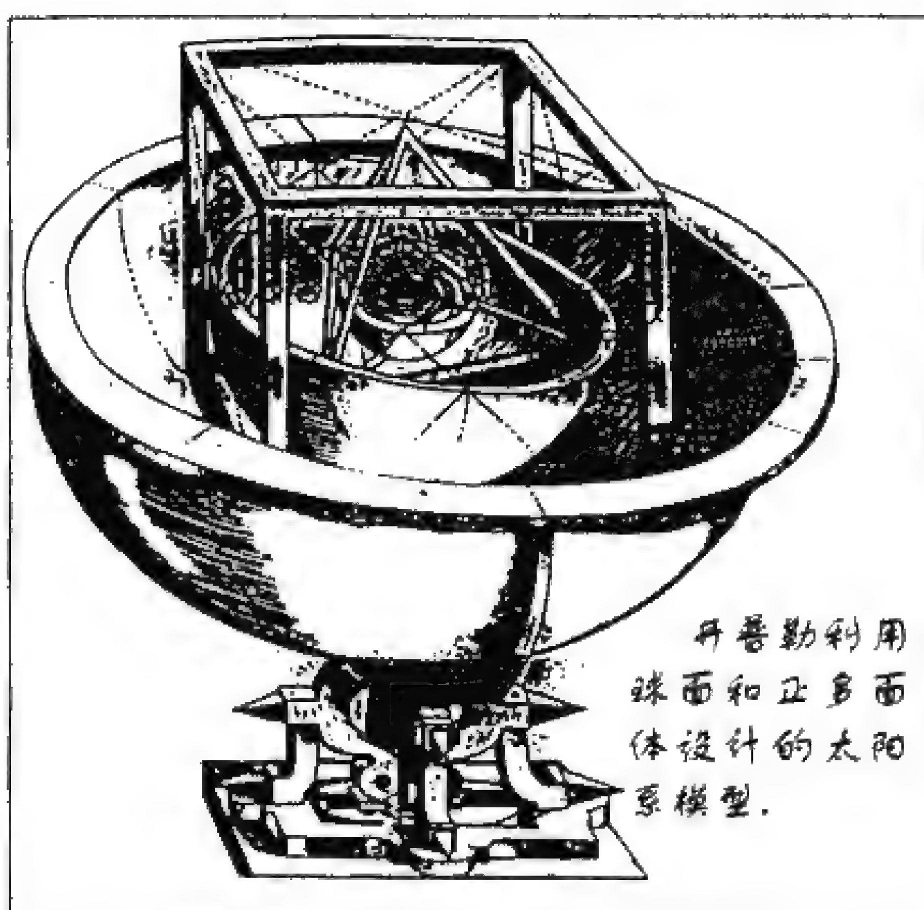
我们所做、所见、所闻的每件事情，常以某种不知不觉的微妙方式与某些其他事情相联系. 我们把盐放进我们的食物，往往会使我们的血压上升. 冬雨滋润植物和江河，江河影响水中的鱼，鱼儿影响渔民的捕鱼量，捕鱼量影响鱼价，鱼价影响我们的食谱，食谱影响我们的开支……

空气、土壤和海洋里的化学药品，可能进入我们的食品链，使某些人诱发基因突变，产生一连串反应，改变他们身体的正常功能.

正像 J. 缪尔(J. Muir)说的那样，"当我们尝试单独挑选某件事情的时候，我们会发现，它牵连着世界上的每一件其他事情."

解释这种连通性，需要根据一种语言，它有自己的字母表和语法(运算). 这种语言已在世界各地发展几千年，并被全体人类运用. 这种语言在所有地方接触过所有的人. 这种语言随着我们生活复杂化而变得更加复杂. 这种语言就是数学. 多少世纪以来，数学家们试图运用数学说明世界的工作方式. 在各种不同的努力当中，我们能看到毕达哥拉斯学派，他们曾经尝试利用整数和它们的比来解释世界. 时间已经表明，世界比那样的解释更复杂. 有些科学家认为，世界可以利用正多面体描述，如 J. 开普勒的模型所示，但是我们已经知道，我们的太阳系比那模型还要复杂. L. 克罗内克(L. Kronecker)没有感到超限数有用或是必需的，然而现在它们在数学里是不可缺少的. 现在，随着我们的探

测器和望远镜向太空深处延伸，从那里传来新的数据和相片，科学家们欣喜若狂，正在探索如何解释那些新发现，例如黑洞、反物质源、星体的诞生、宇宙的定向.


开普勒利用球面和正多面体设计的太阳系模型.

我们多次反复发现，宇宙比目前数学和科学所能够解释的还要复杂. 发生什么事了？数学在扩充. 数学家发明新的数学，去解释新的观念，或者发现，原先以为稀奇古怪的想法现在有了应用. 举例来说，当数学家最初面对需要虚数的问题，如 $x^2=-1$，他们选择了认为这样的问题无解. 后来，在 16 世纪中期，G. 卡丹(G. Cardano)提出一个问题，需要解方程 $x^2-10x+40=0$. 他不满足于说它没有实数解，而是在解它时，利用 -15 的平方根，这样的数在当时是不存在的. 直到 18 世纪，复数才被接受. 如今复数可理解为二维的数[复数可用复平面上的点表示]，并且通过多种途径得以应用，例如描述流体动力学的流线、电流，乃至机翼的形状等. 四元数，四维的数，在 1843 年由 W. 哈密尔顿爵士发现，现在它们被用来描述三维旋转，由此可在计算机中交换图形信息.

在这里，我们看到了复杂性理论，它试图处理错综复杂的宇宙. 复杂性理论是探究宇宙中复杂系统的科学，这些系统的层面无穷无尽，令许多人感到难以解释.

自然现象不是复杂性理论应用的唯一方面. 复杂性理论可以应用于任何非线性系统，没有显示直接因果特性的系统. 这些系统有一个平衡点或倾斜点，那里受到扰动时，能造成混沌. 天气是复杂系统的一个最好的例子，其他例子如疾病传染、国家之间的势力均衡、国家经济的

稳定性,等等. 以上这些例子,每一个都能受到一些几乎无法觉察的微小变化的影响,逐步扩大,最终产生转折点,酿成剧变.



想象一个大城市,在那里,复杂性理论的原理能否用来减少犯罪?牵强附会吗?纽约市的犯罪问题就是复杂系统起作用的一个出色的例子. 我们熟悉有关纽约市大街上毒品和暴力泛滥的故事,但是在 1995 年,纽约市的治安情况明显改观. 它不再排名在顶级犯罪中心里,而是降到了第 136 位. 偷盗汽车案件从 1993 年的 150 000 起下降到 1995 年的 71 000 起. 入室行窃案件在 1980 年超过 200 000 起,而在 1995 年不足 75 000 起. 杀人案减少近 50%. 来自各区的暴力犯罪报告,减少的百分比都是两位数. 事实上,暴力犯罪最严重的地带,犯罪案件减少最有成效. 是什么原因影响了与此有关方面的事情呢? 众说纷纭,不过,特别地,在警署专员 W. J. 布拉顿(W. J. Bratton)的领导下,纽约市警察局坚持变革,有时是极其微小的积极变化,努力改善治安状况. 例如,加强部门之间的协调,使内部手续合理化,加强部门领导人的责任,进一步限制拥有枪支,清除墙上的乱涂乱画痕迹,疏散聚集的年轻人,增强对醉酒驾车和盗车行为的安全检查. 这些改进措施,始终如一,坚持不懈. 在市民担心出事的案件多发地区,他们加紧工作. 这种行动本身就

是一个变化因数. 一件事情带动另外一件. 每个行动未必产生结果. 积极变化的到来，并非点滴积累，而是突然发生. 同样地，平衡的动作也可能突然逆转，就像秋千荡到了最高点，负面变化开始作用，使它向另一侧荡去——这是治安世界的蝴蝶效应[1]. 现今美国警察由于种族歧视和固执偏见造成的野蛮执法，在纽约、康涅狄克州、马里兰州和加利福尼亚州，都有上升趋势. 这些变化，以及另外一些负面变化，会不会改变纽约市治安情况的不稳定平衡呢?

生活和人类行为是一个复杂系统，对于这样的行为，数学可以用来描述它们、影响它们，而且可能预见它们.

---

〔1〕类似于混沌理论中所用的蝴蝶，这里它被用来描述复杂系统的改变. 举例来说，在世界某地，一只蝴蝶舞动它的翅膀，可使空气开始发生微小振动，并且可能逐步扩大影响，在世界的另外一个地方形成了咆哮的飓风. 换句话说，初始条件微乎其微的改变，可能产生惊天动地的结果.

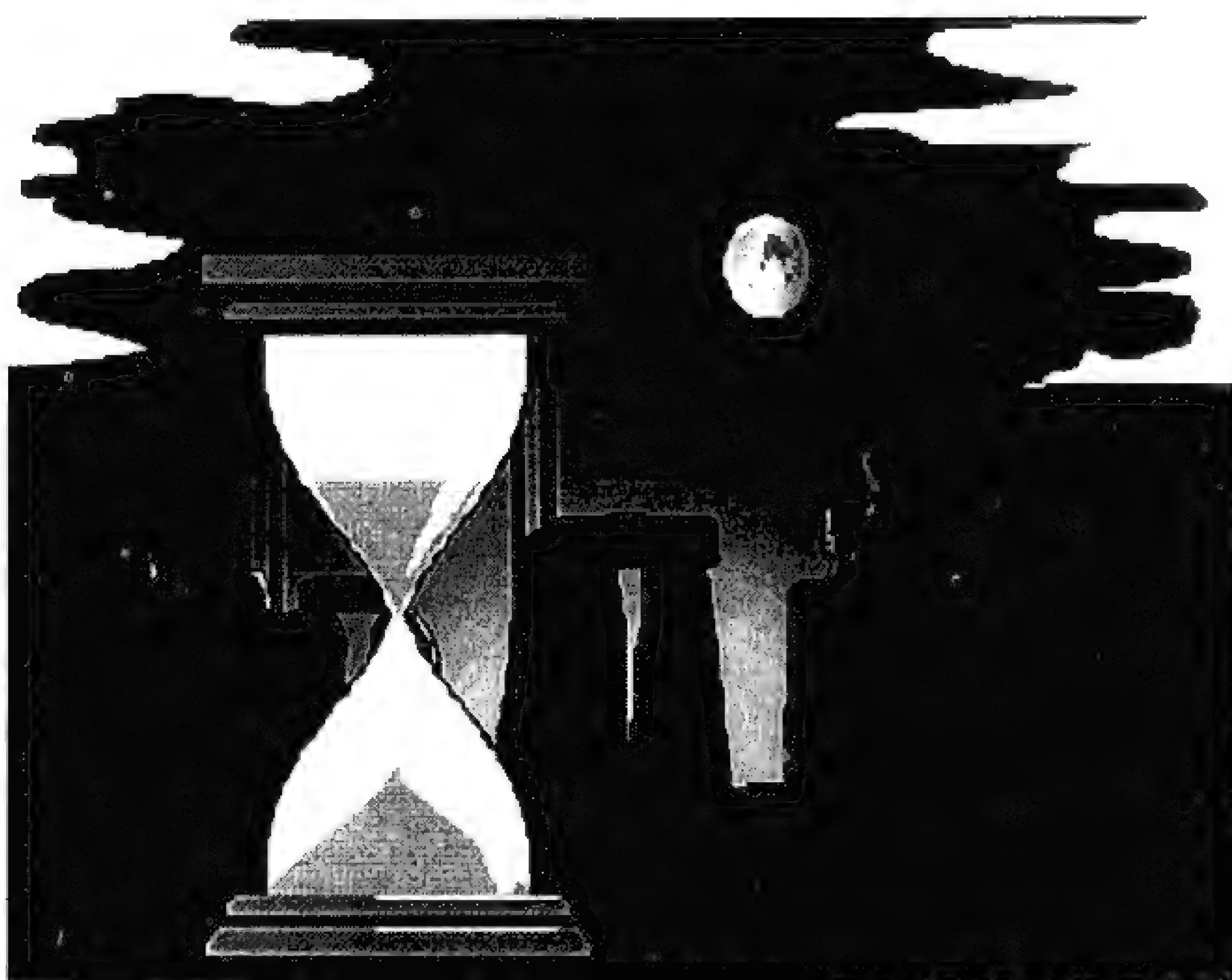
时间的过去和现在，
产生它的未来，
未来光阴追随从前时代.
但愿时光花朵永盛不衰，
怎奈年华似水不复归来.
问有何物
可以长留千秋万载？
唯有胸中思维世界.
问有何事铭记心怀？
时间如箭方向不改.

——T. S. 艾略特[T. S. Eliot 英国诗人、剧作家、评论家，1888—1965 年]

时间的数学面貌

几千年来，时间吸引着和困扰着无数哲学家、诗人、艺术家和科学家的想象. 至今时间观念依然保留着几分缥缈迷茫. 时间是什么？它总是在向前推进吗？它是无休无止、运动不停的吗？时间是为了帮助我们生命井然有序，而想象和虚构出来的吗？我们有这么多的记时方法. 人类发明了许多机械装置来保留时间的痕迹. 他们曾经用巨石阵反映季节，用日晷和水钟记时，用钟摆记秒，用原子钟记录一秒钟的精细片段. 我们想让时光倒流，或者快步前进，但是这种愿望只有在科学幻想小说里才能实现. 物理学家和数学家也曾考虑过这些想法，但是至今困难很多.

多少年来，时间总是联系着运动——例如日月星辰的运动. 古人根据季节变化，决定何时种植，何时收割. 他们已经注意到植物的循环. 现在我们知道，万物都在不断流动或变化. 一切物质，有生命的或无生命的，在分子水平上都有它们的时钟. 有一种蝴蝶，它的整个生命循环只



有一天，而[化学元素碳的一种放射性同位素]碳 14 的半衰期是 5 730 年. 甚至太阳经过几十亿年也会发生一次严重变形. 时间通道的关键是变化. 如果观察不到变化，就会以为时间止步不前. 变化隐含着运动——例如太阳在天空中的运动，电子在分子里的运动. 测量变化或运动，时间和距离的单位必不可少. 在代数中，我们知道，有一个简单公式联系着时间、速度和距离($d=s\cdot t$)，它在我们的日常生活里显得十分有用. 不过，在整个宇宙的大范围里，时间不再表现为我们熟悉的方式. 在现代物理学中，我们学习到，空间和时间是互相联系的. 根据爱因斯坦的理论，空间和时间不再认为是绝对的. 时间是变量，正如空间、物质和宇宙万物一样，唯一例外是光速为常数. 爱因斯坦的理论假定光速是绝对的. 它是宇宙的速度极限. 当物体的运动速度接近光速的时候，它会减慢；运动方向的尺寸缩短，质量增大.

时间的故事和宇宙的故事携手结伴而行. 曾有过各种各样的理论，描述宇宙的起源、结局和现状. 时移境迁，产生许多不同的观念，此起彼伏. 从亚里斯多德的运动观念开始，后来有伽利略的匀加速运动定律，

以及牛顿(Newton)在他的动量定义和万有引力定律中对于时间的运用,都把时间看成绝对的[1]. 一分钟,对于每个观察它或经历它的人,都是相同的. 但是爱因斯坦的狭义相对论和广义相对论改变了时间的作用. 甚至爱因斯坦的时间观念在基本粒子微观世界中也出现问题. 在这里,概率论[2]和统计学扮演了重要的角色. 量子理论研究粒子和次粒子的世界. 在这个水平上,存在许多难以置信的迷人事物. 在这里,光子和中子以光速行进[3]. 这里粒子在同一时刻可以出现于两个位置. 这里科学家从理论上探索有关[假定中的]超光速粒子的存在性问题,它的速度比光还要快,当时间取实数值时,它的质量为虚数,尺寸也是虚数. 有虚数在内,怎样考虑呢? 因为这些数值出现在方程里,可利用方程将它们的虚数值转换成实数. 据称构成宇宙的大部分物质(90%)是看不见的. 它被叫做黑暗物质. 有些科学家相信,黑暗物质是由怪异物质组成的. 怪异物质被取了名字,例如 WIMPS(弱相互作用巨型粒子),MACHOS(木星尺度的光环形厚密物). 我们怎么知道有看不见的物质躲在那里? 数学计算揭示,宇宙中的可见物质,不足以产生宇宙现有的那么大的引力. 这个宇宙是随机性的——所有可能情形可以存在于可分的(平行的)宇宙中,当每种新可能性出现时,它总是相应地变化. 每个平行宇宙有它自己的过去和它自己的现在. 如果有人沿着时间往回走,并且影响了未来的结局,那么具有这种新未来的宇宙,现在就已经独立存在,与旅客原先出发的那个宇宙无关. 在量子世界里,我们也遇到迷你蛀孔,出现于所谓量子泡沫中,虽然我们还没有证据说明在宏观宇宙水平上同样存在蛀孔. 如果蛀孔可在宏观水平发生,旅客只需简单地穿过连接蛀孔两头的隧道,就能跨越太空遥远的距离. 此外,进行长途旅行,也可以通过蛀孔,去做时光漫游. 但是,能够进行时光漫游,会带来许多悖论,让科学家们感到困惑. 怎样使爱因斯坦的工作与量子物理学相协调? 要不要让应用于其中一方面的理论为另一种理论

---

[1] 牛顿认为匀速运动是相对的,但时间是绝对的.

[2] 爱因斯坦对于在量子论中应用概率持谨慎态度.

[3] 光子和中子是仅有的以光速行进的已知粒子.

服务？我们能否提出一种解释，一个统一的理论，去解释整个宇宙的工作？10 维或 26 维数的线性理论可否提供答案，会不会成为万有理论？处理这些观念所需的数学工具特别困难.

如果我们可以忘记时间，并且不理睬它的悖论，我们会有些什么呢？描绘宇宙同时向后和向前运动？我们的思想很难适应这些观念，因为我们发明的时钟似乎只能朝着一个方向运动. 人的一生与整个宇宙相比，如此短暂，难怪我们想要保持每时每刻的资讯. 科学家寻求了解我们世界的最初瞬间. 有没有大爆炸？人们相信，宇宙不是通过运动成为现有的空间，而是由大爆炸产生了物质和空间. 它从一个奇点开始，那里的对象具有 0 维和无穷大密度的质量. 在奇点那里，物理定律遭受破坏，数学也很难描述它们[可用时空流形的某种不完备性描述奇点的存在]. 会有一个大坍缩[4]吗？是否大爆炸与大坍缩交替循环？有些科学家相信，不存在大爆炸，但有一系列仍在演化中的小爆炸. 所有这些疑问，属于科学家们正在探索的一种理论，他们正在为宇宙寻找家谱. 毫无疑问，在探索和解释宇宙及其起源的过程中，时间和数学是主角.

---

[4] 大坍缩是大爆炸的逆转. 在这里，每件事物都将返回到一个奇点. 有些科学家正在建立一种理论，认为大爆炸和大坍缩是循环事件.

数学……并非只是一个对其雄心而言过于狭窄的空间；其实它有无限前景，如同这个被天文学家关注的不停繁殖、永远拥挤的世界.

——J.J.西尔维斯特[James J. Sylvester，英国数学家，1814—1897年]

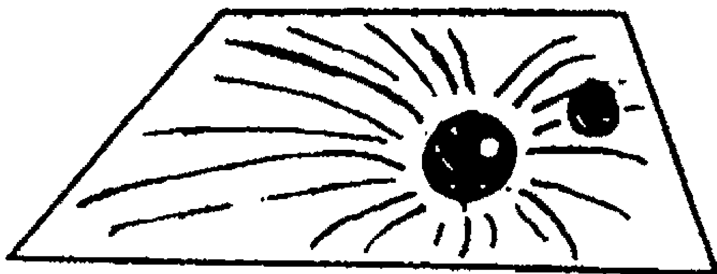
宇宙

科学家能够越来越深入地探索太空，空间探测器收集到越来越多的信息，相应地，对宇宙形状的了解，也越来越丰富. 人们认为，宇宙的



未来，究竟是膨胀，还是收缩，或者保持稳定，依赖于空间的曲率. [什么叫做"空间的曲率"？稍待片刻，下文自有交代.]什么影响曲率？宇宙的曲率依赖于它的物质密度，并且据信，物质的质量存在一个临界水平（叫做临界密度），影响曲率. 物质如何引起弯曲？考虑一个庞大的质

量，例如我们的太阳．不妨想象，太阳像一个超级大球，静卧在一条橡皮床单上．一个在太阳附近的较小的质量，例如地球，将会沿着橡皮床单，往太阳压出的凹陷部分滚动．实际上，太阳的质量已经将它周围的空间扭曲变弯，因为空间不是平坦的，所以欧几里得几何的性质不再保持[1]．在太阳引力场中，可以观测到光线弯曲的现象．直到 19 世纪[初期]，欧几里得几何仍是唯一的几何学系统，但是欧几里得平行公理已经受到严重挑战．虽然这些挑战没有证明欧几里得是不对的，但是它们却导致了非欧几何学——不满足欧几里得平行公理的几何学．

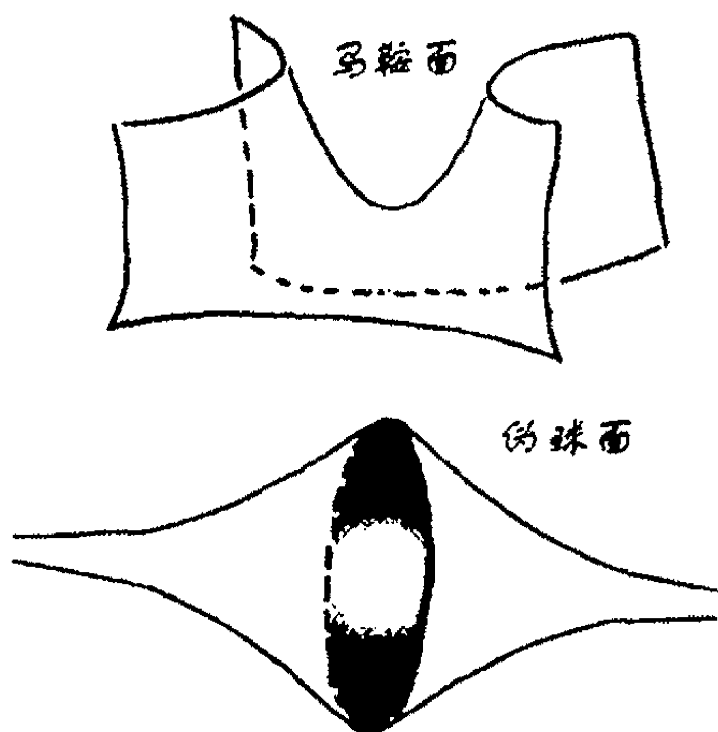


不同的几何形状有着不同的曲率．[曲率表示偏离平直的程度．曲面在其一点的曲率叫做高斯曲率，它的数值可以反映曲面在这一点附近的弯曲情况．]例如，半径为 R 的球面，在其每一点的高斯曲率等于 $\frac{1}{R^2}$[原文误为 $\frac{1}{R}$]．较小的球面，曲率较大．一个球面的半径越小，曲率越大．例如，半径为 2 的球面，高斯曲率是 $\frac{1}{2^2}$，即 0.25[原文误为 $\frac{1}{2}$，即 0.5]；如果球面的半径是 10，那么它的高斯曲率等于 $\frac{1}{10^2}$，即 0.01[原文误为 $\frac{1}{10}$，即 0.1]．考虑一枚鸡蛋的曲率．它胖的一头高斯曲率较小，瘦的一头高斯曲率较大．如果曲面在一点附近是凸的[原文此处误为“凹

[1] 黎曼(1826—1866 年)在 1854 年的演讲中，[提出了一种 n 维弯曲空间的微分几何学，后来叫做黎曼几何．正如球面几何是曲面几何的特殊情形，作为黎曼几何的特例，]得到一种非欧几何，叫做椭圆几何，[基本上]就是球面几何．球面几何中的“直线”[两点间的最短线]是球面的大圆，它的长度有限，没有起点，也没有终点．在球面几何里，通过两点可能有无限多条“直线”(例如通过地球北极和南极的经线)．20 世纪初期，爱因斯坦发展了他的广义相对论(一种引力理论)，其中他把引力与四维弯曲空间的曲率联系起来．

N. 罗巴切夫斯基(N. Lobachevsky，1793—1856 年)和 J. 波利亚(1802—1860 年)[在不同国家各自独立地]试证欧几里得平行公理，结果发现了另外的一种非欧几何，叫做双曲几何．罗巴切夫斯基在 1829 年发表了关于这种几何的论文[J. 波利亚稍后发表]．高斯也已发现这种非欧几何，但没有公布他的发现，可能由于担心[不容易被人理解而遭受无谓的]嘲笑．

的"(concave)],类似于球面情形,那么规定它在这一点的高斯曲率是正数.如果曲面在一点附近是凹的[原文此处误为"凸的"(convex)],类似于马鞍面或伪球面,那么规定它在这一点的高斯曲率是负数.有些曲面在某个区域里各点的高斯曲率是正数,而在另外的区域里高斯曲率是负数.平面的高斯曲率处处为零.将一种几何对象置身于不同的几何学中考虑,性质会有变化.举例来说,在平面上成立欧氏几何.在这里,例如,两点之间的最短距离是线段,三角形内角之和等于180°,平行线间的距离处处相等,而在非欧几何中的对应性质却不同.在球面几何中,两点之间距离最短的连线是一条曲线,三角形内角之和大于180°,不存在平行线;而在波利亚和罗巴切夫斯基的双曲几何中,两点之间距离最短的连线也是一条曲线,三角形内角之和小于180°,叫做"平行线"的其实是渐近线[2].[在曲面几何学中,把曲面本身看成一个二维的弯曲空间,曲面在其每一点的高斯曲率就是二维空间在这个点的曲率.]因为球面是凸的[原文此处误为"凹的"(concave)],所以空间的曲率是正数[并且在每一点的曲率都相等,等于球半径平方的倒数,即曲率是正的常数].双曲几何可表示成伪球面上的几何学,伪球面是凹的[原文此处误为"凸的"(convex)],相应地,这里空间的曲率是负数[负的常数].



[二维的曲面几何,可以推广成 n 维的黎曼几何.曲面在一点的高斯曲率,推广为 n 维空间在一点对于一个指定二维面素方向的黎曼曲率.如果黎曼曲率是常数,那么这样的 n 维空间叫做常曲率空间.设 n 维常曲率空间的曲率是 K,那么当 $K=0$ 时它的几何是欧氏几何,当 $K<0$ 时是双曲几何,当 $K>0$ 时是椭圆几何或球面几何.球面几何或

[2] 直线渐近于一条曲线,是说这条直线向一侧延长时,无限靠近已知曲线,但不与它相交(叫做它的渐近线).

双曲几何的三角公式都与曲率 K 有关.]在这些几何学里,有没有一种能适合于我们的宇宙?[在广义相对论中,三维空间和一维时间共同组成四维时空,其中的每个四维点表示一个事件.时空的数学理论是一类四维的黎曼几何,时空必须满足爱因斯坦的引力场方程.作为宇宙模型的四维时空,一般不是常曲率的.但是根据天文观测,在整个宇宙的大尺度范围内,可以认为,每一时刻,空间都是均匀各向同性的.这就意味着,就宇宙模型而言,在四维时空中,对于每个确定的时刻 t,三维空间总是常曲率的,其曲率 K 的大小随着时间 t 而变化,但是为正、为负或为 0 却保持不变.这里的曲率 K,就是本书所说的"空间的曲率"或"宇宙的曲率".]我们宇宙的曲率是什么?科学家相信,临界密度确定宇宙的曲率为正、为负或为零.如果物质的密度小于临界密度,那么宇宙具有负曲率,并且无限膨胀.这样的宇宙,[对于每个确定的时刻 t,]由双曲几何控制.但若物质数量恰好在临界密度,那么宇宙的曲率为零——它是平坦的,因而我们将回到欧几里得的世界.此处宇宙将继续膨胀,但是它的膨胀率趋向于零.如果物质的数量超过临界密度,那么宇宙具有正曲率,膨胀将逐渐减慢,终于停止,这时得到闭合的球面空间.这样的一个宇宙,[对于每个确定的时刻 t,]可用球面几何描述.

最近的天文观测表明,宇宙正在膨胀,不过,膨胀的原因,是由于正曲率、负曲率还是零曲率呢?是否膨胀将会永远继续,天体互相远离,因而各自孤独隔离,湮没在冰冷黑暗的宇宙深渊之中?会不会宇宙在某一点发生转折,一路退行紧缩,直至无可再缩,崩溃瓦解(大坍缩)?或者有朝一日几乎停顿?或者,也许[膨胀与收缩反复交替,似乎]宇宙是它的创造者手中一只庞大无比的随着提线旋转而上下跳动的"悠悠"玩具?最近有数据和理论指出,如果假定宇宙是负曲率的,那么可推出宇宙是有限的,但是不断传来难以置信的消息——例如被称为 1a 型超新星的爆炸星体,暗示着有一种反引力,将宇宙的结构像奶糖一样拉伸.这些消息把我们思考的和我们知道的都搅乱了.可以肯定,我们正坐在宇宙学发现和理论的惊险过山车上,所以要紧抓不放.

据说图形使世界变得有规律.或许如此.但我确信,图形告诉我们,世界是规律性较强,还是较差.

——歌德[Goethe,德国诗人,1749—1832年]

数字帮助查错

你是否曾经想知道

——银行职员在你的账号里输入一个错误数字,怎么会立刻发觉出了毛病?

——使用信用卡时,输入卡号数字发生颠倒,怎么会被判为无效,以为是其他人的账户?

——邮码扫描器阅读一封信上印刷的条码,怎样评估阅读结果对不对?

以上这些,都包含了校验数字.把校验数字附加到代码的数字里面,利用一套算法,可以根据它和代码数字,核对产品的代码数是否真实.产品的代码数可以是银行账号、飞机票号码、社会安全号、书的条形码——它们都表示成一串数字.其中每一种码的数字和它的校验数字一起,组成一种特定的判别标准.如今条形码已经成为一种生活方式,出现在杂货铺的每件商品上、书上、工具上、玩具上.条形码中的数,通过扫描器、磁条传输,或者直接输入储存有关信息的计算机,从而确认物品,并且核对商品代码数的正确性.利用这一信息,计算机软件帮助商家了解存货和销售状况.

将商品信息输入计算机,条形码是最有效、最便宜和正确的方法之一.扫描器射出光脉冲,照在条形码的亮线和暗线上——亮线转换成0,暗线转换成1.软件利用校验数字,对得到的二进制数进行即时核对.例如,对于信用卡号码4 673 617 489 547,右边第一个数字7是校验数字.它是怎样确定出来的呢?从卡号的左边第二位数字开始,往后取每隔一位数字(不包括校验数字),将它们各自乘以2,分别得到数

12、6、2、8、18、8. 现在将这些数的各数位上的数字加到一起：

$$(1+2)+6+2+8+(1+8)+8=36.$$

将这个和数与卡号的其他数字相加，但须除去右边最后一位数字，那是我们正在试图发现的校验数字. 于是我们相加，得

$$4+7+6+7+8+5+36=73.$$

比这个总和稍大并且末位为 0 的数是 80，从 80 减去这个总和，得到

$$80-73=7,$$

它就是这张卡的校验数字. 核对卡号是否正确，可利用一种叫做“模 10 法”的方法，步骤如下.

(1)从左边[原文误为右边]第二位数字开始，往后[原文误为前]每隔一位取数字，并将它们各自乘以 2，如前面已做的那样，得到 12、6、2、8、18、8.

(2)把这些数的各位数字与卡号中没有取两倍的那些数字相加. 两倍以后各数的数位上的数字之和是

$$(1+2)+6+2+8+(1+8)+8=36.$$

两组数字的总和是：

$$4+(1+2)+7+6+6+2+7+8+8+(1+8)+5+8+7=80.$$

如果这个和能被 10 整除，那么这个卡号就是正确的.

美国的邮政区码也使用校验数字. 每个邮政区码都有一个校验数字，附在信封上印刷的条码末尾.

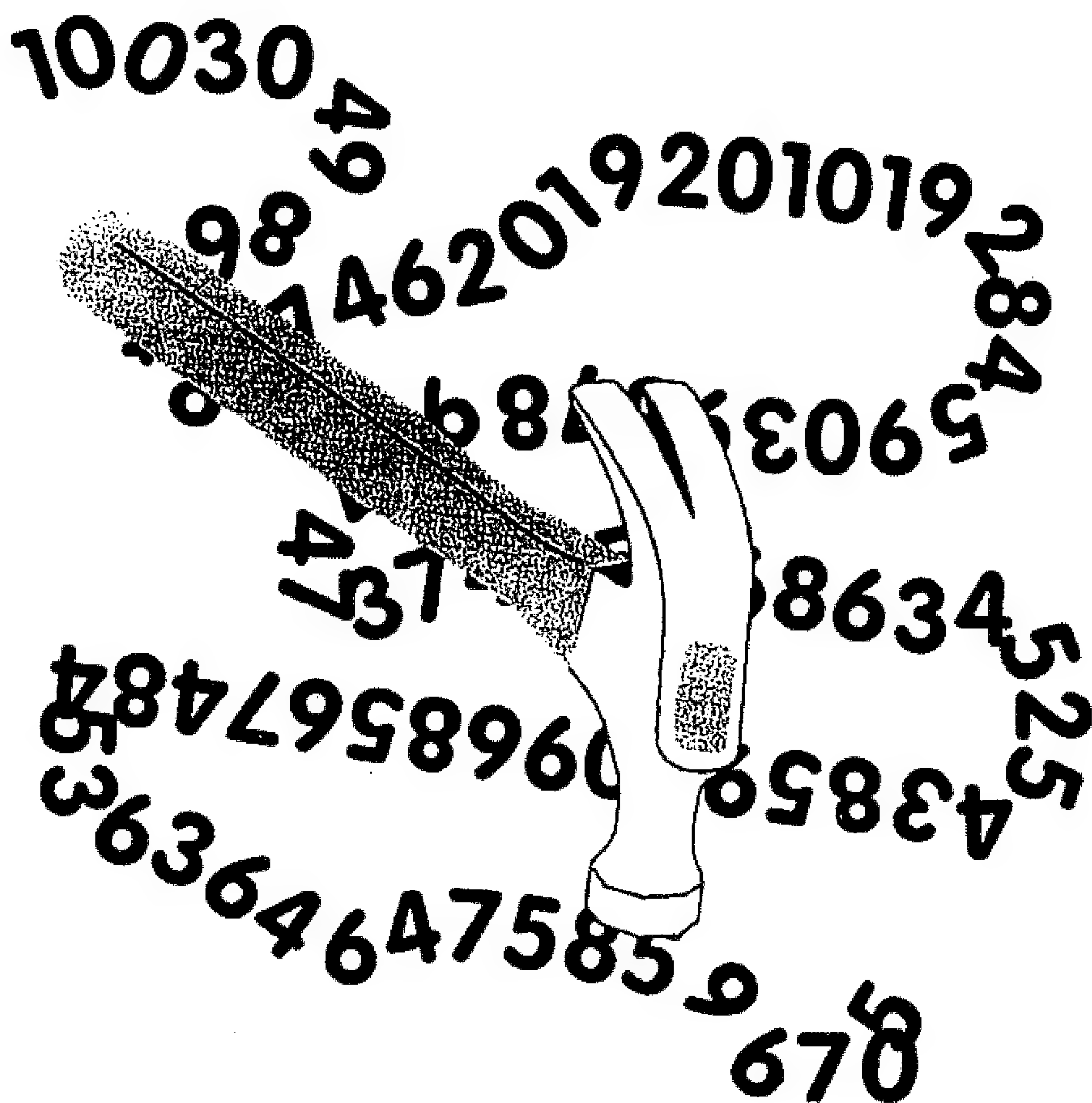
——分配的这个校验数字，由下面的算法求出. 如果你的美国邮政区码是 94070－1755，只需求这 9 个数字的和，然后从比这个和稍大且末位是 0 的数里减去这个和. 因为

$$9+4+0+7+0+1+7+5+5=38, \qquad 40-38=2,$$

所以它的校验数字是 2. 因而对于美国邮政区码 94070－1755，将校验数字 2 附在后面，得到邮政网络条形码的编码形式 9407017552.

条形码上的校验数字把出现误差的机会减少到每一千万件里出现一处误差.

校验数字和数的高超技巧，在保护编码安全、对付可能发生的误差



方面，发挥了重要作用. 但是，实际捕获误差的幕后英雄，却是一个叫做信息论的数学分支. 举例来说，如果一张信用卡受过猛烈撞击，那么它的磁条被读取时，信息被传输成数位（若干个 0 和 1），它们可能被警告有静电、振荡、损伤或污垢，并被记录到磁带、光盘，或者记录为声波. 这里要靠数学中的纠错码来发现和改正偶然错误，修复信用卡. 校验数字通常能够使我们注意到一个误差，但是它们不能改正错误.

另外一些校验数字技术是：

（1）在飞机票的号码中，右边最后一个数字是校验数字. 取出机票号码的其余部分，将它除以 7，如果余数等于校验数字，那么可以相信机票号码是正确的.

（2）在大多数杂货店里，条形码扫描器编制了一种程序，将商品代

码数从左端数字开始，每隔一位相加，然后将这结果乘以 3，再与其余数字相加. 如果答数末尾不是 0，就有差错.

在信息论中，数学家发展了一些方法，对于用数字方式通过无线电波、电话线路、计算机磁盘传输的信息，可以发现和纠正其中的错误. 其中有一种方法要求数码资料重复，就像要求某人重复一句话，来确定听到的是否正确. 举例来说，如果 0110 是想要传送的数据，那么可能将它传送成 00111100，其中每个数字重复两遍. 因此，如果传送过去的信息是 01111100，就能知道其中有错. 然后用电脑程序分析这些数字，决定怎样修改数字，使它能表达出预期的信息. 另外一种核对二进制数字串的方法，是在这串数字的末尾附加校验数字. 在以上两种情形里，都是利用计算机软件发现并且改正差错. 这两种方法都注重最经济地利用时间，并且它们的准确率都高达百分之九十几. 线性码已经成为一种普遍采用的纠错方法，因为它们容易编码和解码. 一个代码是一些代码字的集合. 代码字是一串 0 和 1. 如果一个代码是任意两个代码字的和，那么它是线性的. 另一方面，非线性码要求数据较少，并且编码和解码非常困难. 近几年来有所突破，将二进制数字（线性码）与四进制数字（0、1、2、3）组合，编写线性四元码，它的末尾以相对简单的方式连接非线性码. 某些系统也用过三进制数. 如果能将一些简单方法加以精练，使它们适用于非线性码，那么发现并纠正错码的处理时间可能会大幅度地减少. 看上去几乎是讽刺，数系的基如此简单——基是二（二进制数），基是三（三进制数），或者基是四（四进制数）——却被用来解决发码和收码、查错和纠错的复杂问题. 倘若你正在购书、刷信用卡，或是正在使用银行 ATM 自动柜员机，那么这些简单的二进制数、三进制数和四进制数正在为你工作.

当我们能在具体事物内发现某种形状之前，人类的思想里已经首先将它们形成了.

——A. 爱因斯坦[美国物理学家，1879—1955 年]

数学与罗宾的艺术

准晶体、高维空间、非周期镶嵌图和五重对称性有什么共同之处？T. 罗宾(T. Robbin)——一位当代美术家，他的作品照亮了高维空间和准晶体[1]对称性走进绘画的新路途.

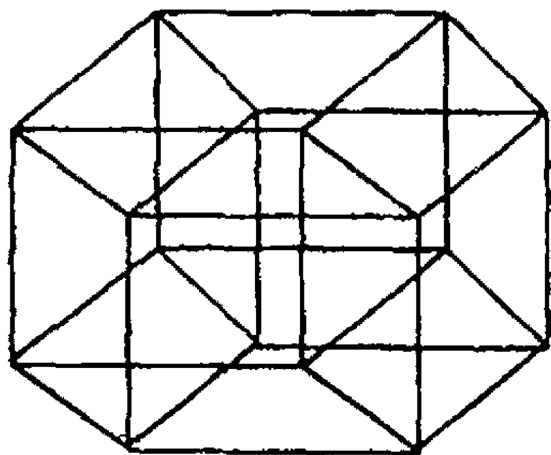
一位美术家在一个确定的空间里工作. 对于画家，工作空间是画布平面. 许多世纪以来，画家们利用画布上的 2 维图形表现 3 维形体，其中可以看到拜占廷肖像画的超现实主义平面形象，以及文艺复兴画家利用透视表现的现实景物. 在从空间到画布的变换中，出现了数学里的射影几何学. 有些画家，例如塞尚，采用多点透视来扭曲传统的 3 维空间，形成错觉，并且通过使画中景物延伸到画面以外，暗示在画布边框外面仍有空间(见《静物与水果篮》(1888—1890 年)). 另外一些画家，如 M. C. 埃歇等，在他们的作品里兼有 2 维形象与 3 维形象. 在埃歇的《蜥蜴》里，从蜥蜴的平面镶嵌图，逐渐变成 3 维空间里真实的蜥蜴形状. 在出现非欧几何、黎曼的高维空间和"蛀孔"之后，高维的数学观念，点燃了数学家、物理学家和艺术家的想象火花. 转入 20 世纪以后，立体画派创作的画中，含有高维对象和多个瞬间景象的叠加. 如今 T. 罗宾的画再一次重新定义空间. 他改为画熟悉的高维对象，他的大部分作品主题是 4 维的. 观众通过他的眼睛来感受超立方体和

---

[1] 20 世纪 80 年代以前，人们认为所有晶体都是周期性的，并且没有五重对称性(如果将一个图形旋转五分之一周，即 72°，结果与原图形重合，就说它有五重对称性). 1982 年，化学家 D. 谢克特曼(D. Shechtmann)用锰和铝制成一种超强合金，它竟然能具有前所未闻的五重对称性. 这些发现引出一类新的晶体，叫做准晶体，以及对于晶体的一种新的一般定义.

其他 4 维对象.

多年以来，罗宾并非只是单枪匹马、满怀热情探索如何能使高维让人看见，他的工作已经获得了数学家和计算机科学家的帮助. 他埋头于高维数学中，发展并应用电脑程序[2]，帮助他应用计算机揭示超立方体的形状和它的射影. 他兴致勃勃，坚持不懈，创作了许多激动人心的画，给超立方体赋予了新的视觉意义.



最早发表的高维空间图形之一，W. 斯特林厄姆（W. Stringham）作（1880）. 瑞士数学家 L. 施莱夫里（L. Schläfli）在 19 世纪中叶首次画出一幅四维立方体.

罗宾使用了各种不同技术，表现超立方体的形象. 在《四维世界》中，焊接的钢杆和着色的线条，引导我们观察各个平面和它们的旋转. 另外一些画，如《单纯形第 9 号》、《作品四》，以及《无题第 20 号》，是画在布上的丙烯画，画中对象具有各种各样的色彩、形状、质感和设计. 在这些作品中，一些对象被分层堆积在其他对象上面，并且放置在适当角度，使你觉得自己正在同时经历各种不同的维数. 人们有时最后会感到奇怪，哪一维是真正被看到的呢？

准晶体和非周期性镶嵌图，在罗宾的雕塑中扮演了重要角色. 此外，在罗宾的金属和塑料雕塑中，阴影也是重要部分[3]. 形状的内在联系，让观众认识到，各维并非互相独立，它们都同时存在，就像在他的《准晶体拱顶》中那样. 想象一个用杆制成的准晶体拱顶，这些杆从一个十二面体的 12 个面散发出去，在结点互相连接，并且占据 3 维空间. 这个雕塑的某些面被用彩色塑料分层. 它在地面上的投影是一种令人赞叹并惊奇的非周期的镶嵌图，而且当观众在雕塑下面走动时，目中所见

[2] 罗宾发展了程序 FOURFIELD，他起初在自己的作品中应用这种程序，并在他的书《四维世界：计算机、艺术和第 4 维》中讨论. 现在他用程序 FORMIAN，这是英国为了工程需要而发展的.

[3] 罗宾为丹麦技术大学创作的雕塑《准晶体》，尺寸比实物大. 它的长度是 50 英尺[约 15 米]，有 3 层楼那么高.

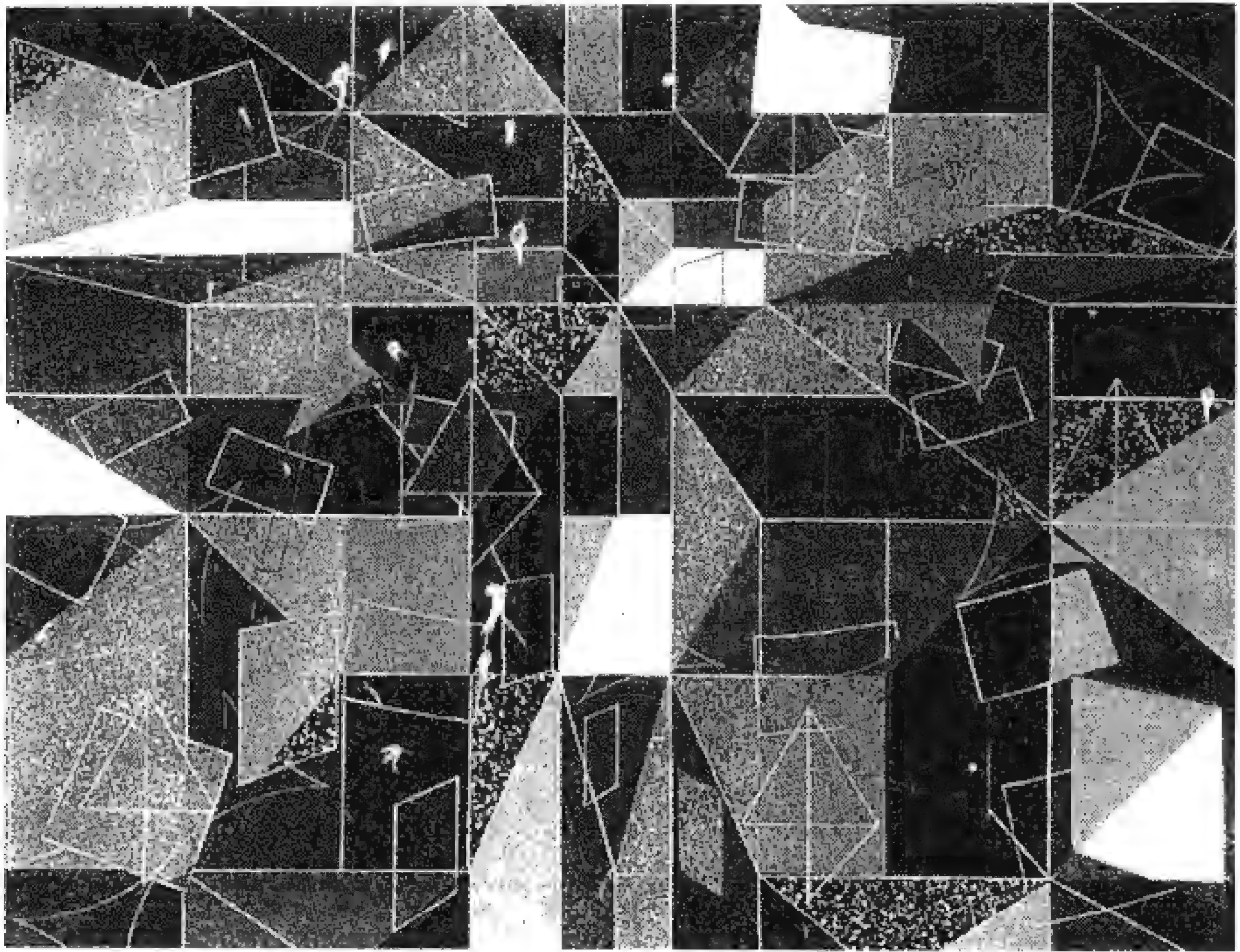
杆的形状会发生变化，由此增强了雕塑的表现效果. 某一瞬间见到的是一系列三角形，而在另一位置观看，却变成交织的五角星了. 能够同时体验 2 维和 3 维空间的镶嵌装饰，实在妙不可言，并且还能体验到隐含的第 4 维. 除了作为艺术表现之外，罗宾的雕塑提供了一种证明方式，显示准晶体实际上在第 4 维中是周期性的（见后面的照片）. 仅当投影到地面（平面）上，才出现它们的非周期性图案和五重对称性[4].

超立方体一瞥： 想象一棵树和它的树叶留在地面上的阴影. 风吹过来，阴影开始移动，并且改变形状. 从本质上看，树影是 3 维树的 2 维表示. 每片阴影是树的一部分的投影. 科学家用类似的方式使高维能被看见，不过由于他们没有真实的超立方体可供投射阴影，所以他们编写出电脑程序，来观察超立方体被平面截得的截面. 为了将这个过程形象化，想象有一个运动的球面穿越一个平面，它在平面里留下的压痕是一系列同心圆，有一个共同的中心点. 而一个正方体，则将留下多种截面，从单独一个点，到一条线段、三角形、正方形、六边形，依赖于可能的交角. 将这些压痕信息集中起来，就能形成高维对象真实形状的印象.

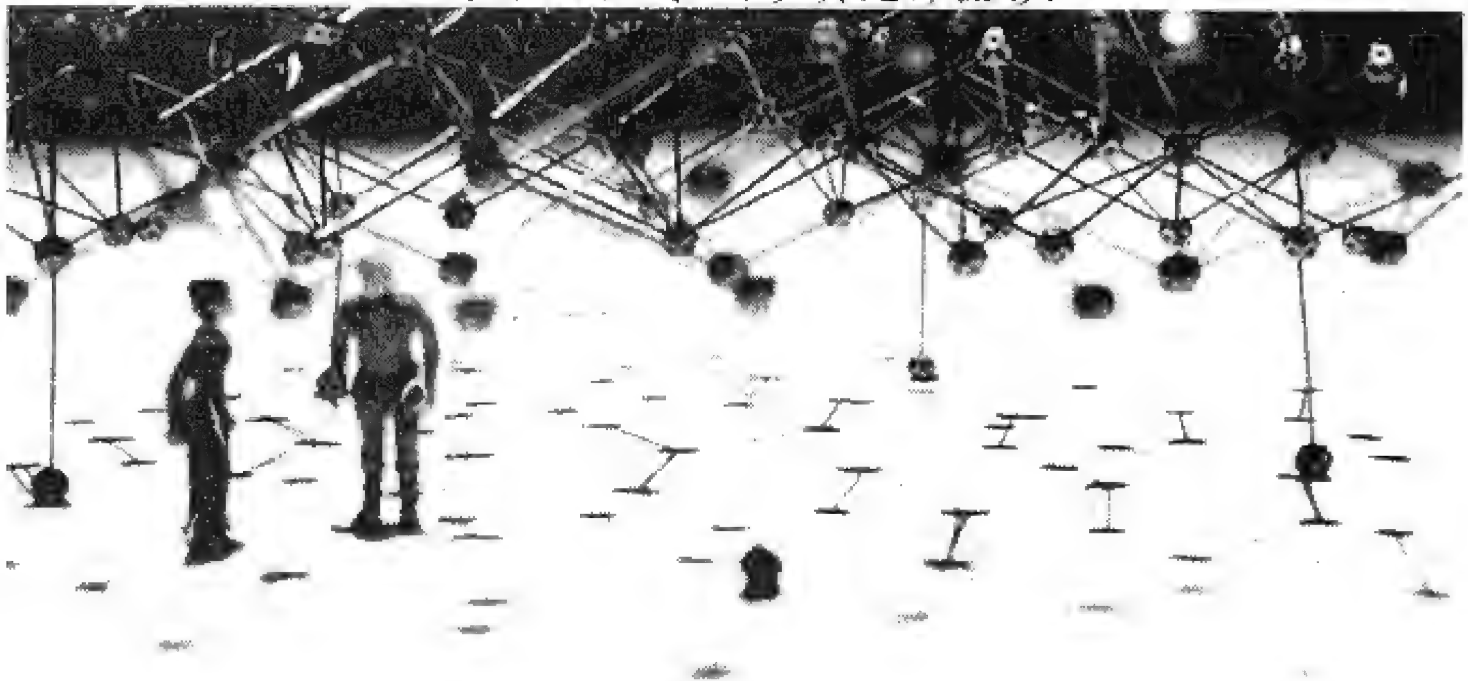
当我们想到"空间"的时候，其实我们已经将这个术语局限理解为 3 维空间，因为那是我们在它里面居住和活动的空间. 艺术家感受空间，并且通过他或她的艺术创造，使空间进入想象力的世界. 罗宾将艺术与数学组合，用一种赏心悦目的美学方式创造作品，向我们介绍迷人的高维世界和其他数学观念.

---

〔4〕检晶仪利用 X 射线将晶体和准晶体投影到平面上. 本书稍后还有一章涉及准晶体，对此将有较详细的讨论.



无题第 8 号，T. 罗宾作，1980，56″×80″，丙烯油画．
画家本人收藏．T. 罗宾允许摄影．



准晶体空间框架模型，1989．注意，阴影构成一个彭罗斯图案．
T. 罗宾允许摄影．

我知道 2 加 2 等于 4，而且如果我会证明它，也将乐于证明——虽然我必须说，如果我能利用任何一种方法将 2 加 2 转换成 5，我会有更大的快乐.

——拜伦[Lord Byron，英国诗人，1788—1824 年]

这是费马最后定理的最后吗?

在正整数范围内，对于 x、y 和 z，你能为方程 $x+y=z$ 找到多少组解?

$1+2=3$，$1+1=2$，$5+7=12$，对吗?

你是正确的！有无限多组解.

方程 $x^2+y^2=z^2$ 怎么样? 正如你猜想的，这个方程看起来像勾股定理的等式. 它也有无限多组解. 其中有 3、4、5($3^2+4^2=5^2$)；6、8、10；9、12、15(事实上 3、4、5 的任何倍数都是解)，并且 5、12、13 的任何倍数等等同样也是它的解. 以上这些不过是无限多组勾股数中的少数几组.

现在，让我们尝试方程 $x^3+y^3=z^3$. 这个嘛，我不能发现除了 0、0、0 以外的任何解，但是这一组零解应该排除，因为 0 不是正数.

方程 $x^4+y^4=z^4$ 怎样呢?

方程 $x^5+y^5=z^5$ 又如何呢?

$x^6+y^6=z^6$ 呢? ……对于方程 $x^n+y^n=z^n$ 呢? 碰运气? 是否对于某个更高的指数有解?

刚才你已经试验了费马大定理[Fermat's last theorem，原意为"费马最后定理"，中文习惯称之为"费马大定理"]. 事实上，当自然数 n 大于 2 时，没有人求出任何满足方程的正整数 x、y 和 z. 它开始于 17 世纪，那时法国律师费马(Fermat)在他的一本丢番图著《算术》[1]的页

---

[1] 费马有一个习惯，在书页边缘的空白地方写笔记. 事实上，他用的《算术》书，页边上有很多数学猜想和数学观念. 他的儿子发表了包含父亲笔记的费马注释《算术》完整版本.



P. 费马

边上，潦草地写了一个命题. 除了叙述他的猜想之外，还接着写道："……我发现一个证明，实在奇妙，但是这个页边太小，写不下去."这些话引得数学家们忙碌了几个世纪.

发生了什么情况？它的证明，让数学家们和业余爱好者们冥思苦想，超过了三个半世纪. 曾经多次悬赏征集它的证明[2]. 尝试证明这个定理和有关结论的数学家名单，读起来就像《数学名人录》. 其中，我们

---

〔2〕法国科学院在1815年和1860年提供金质奖章和300法郎，征集费马大定理的证明. 1909年，P. 沃尔夫斯凯尔(P. Wolfskehl)遗赠100 000马克，奖励公开发表并被德国科学院鉴定为正确的证明. 最初三年，据报告，提交的证明超过一千个. 甚至现在还有提交证明的，不过那笔奖金目前只值大约5 000美元.

可以看到——

欧拉(1707—1783 年)、高斯(1777—1855 年)证明了 $x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解.费马曾经对于方程 $x^4+y^4=z^4$ 写出一个证明.对于 $x^5+y^5=z^5$ 的第一个证明是勒让德(Legendre,1752—1833 年)提出的.狄里赫利(Dirichlet,1805—1859 年)证明了 $x^{14}+y^{14}=z^{14}$ 的情形,拉梅(Lamé)证明了 $x^7+y^7=z^7$ 的情形.索菲・热尔曼(Sophie Germain)作出一个重要贡献,有助于证明 $x^5+y^5=z^5$ 的情形[3].接下来一个重大进展,是 1840 年 E.库默尔(E. Kummer)对于另外一大群数证明了费马大定理[4].在当代数学家费马大定理名人堂中,我们可以看到 A.魏尔(A. Weil),谷山丰(Yutaka Taniyama),G.弗雷(G. Frey),G.法尔廷斯(G. Faltings),志村五郎(Goro Shimura),K.里贝(K. Ribet),B.马祖尔(B. Mazur),A.威尔斯(A. Wiles).他们是对费马大定理有贡献的众多数学家中的一部分.尝试证明但没有新发现或新结果的人,不计其数.但是,由于试证费马大定理,得到了许多重要的有关定理.

现今费马大定理的证明进展如何? 它已经被正式证明.在 1993 年 6 月,美国普林斯顿大学教授 A.威尔斯震撼了数学世界和人民大众,他在剑桥会议报告的最后一讲中掀起高潮,宣布他已部分地证明了谷山-志村猜想,而这个猜想被数学家们认为是证明费马大定理的关键.他的 200 页证明,题为《模椭圆曲线与费马大定理》,后来被威尔斯自己和其他数学家仔细检查过.1994 年 6 月发现,存在某些重要漏洞,尚未解决.但是在 1994 年 10 月底,威尔斯使数学社会再次吃惊,他有两份新手稿,一份处理他的最初证明中发现的问题,另一份则是他的证明在数学中迈出的一个重大步骤.在后面这一部分,他与剑桥的数学家 R.泰勒(R. L. Taylor)合作.威尔斯采用间接证法——假定费马大定

---

〔3〕她证明了,如果 $x^5+y^5=z^5$,那么 x、y 和 z 中至少有一个被 5 整除.

〔4〕他对于所有小于 100 的素数,除去 37、59 和 67 而外,证明了这个定理.利用现代计算机,计算技术已经发展到可以处理费马大定理.举例来说,在 1987 年,使用计算机技术和方法,S.瓦格斯塔夫(S. Wagstaff)和 J.唐纳(J. Tanner)证明了,对于所有不超过 150 000 的指数,费马大定理都成立.

理不对，看看有无矛盾发生. 沿着这条思路，出现一条奇怪的椭圆曲线[5]，此外还与谷山-志村猜想矛盾. 所以，为什么谷山-志村猜想的证明对于威尔斯的证法很重要，原因就在这里. 这两篇论文投稿给美国《数学年鉴》，已经审查通过.

但这并不是费马最后定理[费马大定理]的最后新闻. 1999 年，数学家 B. 康拉德(B. Conrad)，R. 泰勒，C. 布勒依(C. Breuil)和 F. 戴蒙德(F. Diamond)研究对于所有椭圆曲线方程的谷山-志村猜想，而不是像以前那样只探究特殊情形. 他们的工作揭开了两种曾被认为完全无关的不同数学对象之间的联系(椭圆曲线和模形式). 看来，费马大定理的证明，对于证明谷山-志村猜想，是一块踏脚石，使得现在这四位数学家能够对于所有椭圆曲线证明谷山-志村猜想.

---

[5] 椭圆曲线(不要与"椭圆"混淆)是方程形如 $y^2=x^3+ax^2+bx+c$ 的曲线，其中 a、b、c 是常数. 数学家谷山丰首先建议，在椭圆曲线方程中，令 x 和 y 的值为有理数，产生一种数学对象，叫做模形式. 志村五郎在此观念基础上加以扩充，因此发展了谷山-志村猜想. 起初数学家们觉得这两种对象是如此不同，以为在它们之间不会存在什么联系. 现在看来，联系已经浮出水面了.

数学是依据特定简单规则、利用一些无意义的符号在纸上玩的一场游戏.

——D. 希尔伯特[David Hilbert，德国数学家，1862—1943 年]

数学与生活中的对策

——对策论漫谈

“你们两位一起旅行吗?”飞机场机票服务窗口的服务员问道.

“是的,”你回答.

“那么,第 7 排怎么样? ——一张票靠近走廊,一张票在中间,还是一张中间,一张靠窗?”服务员问.

“不,我们想要两张第 7 排,一张靠近走廊,一张靠近窗户,”你答.

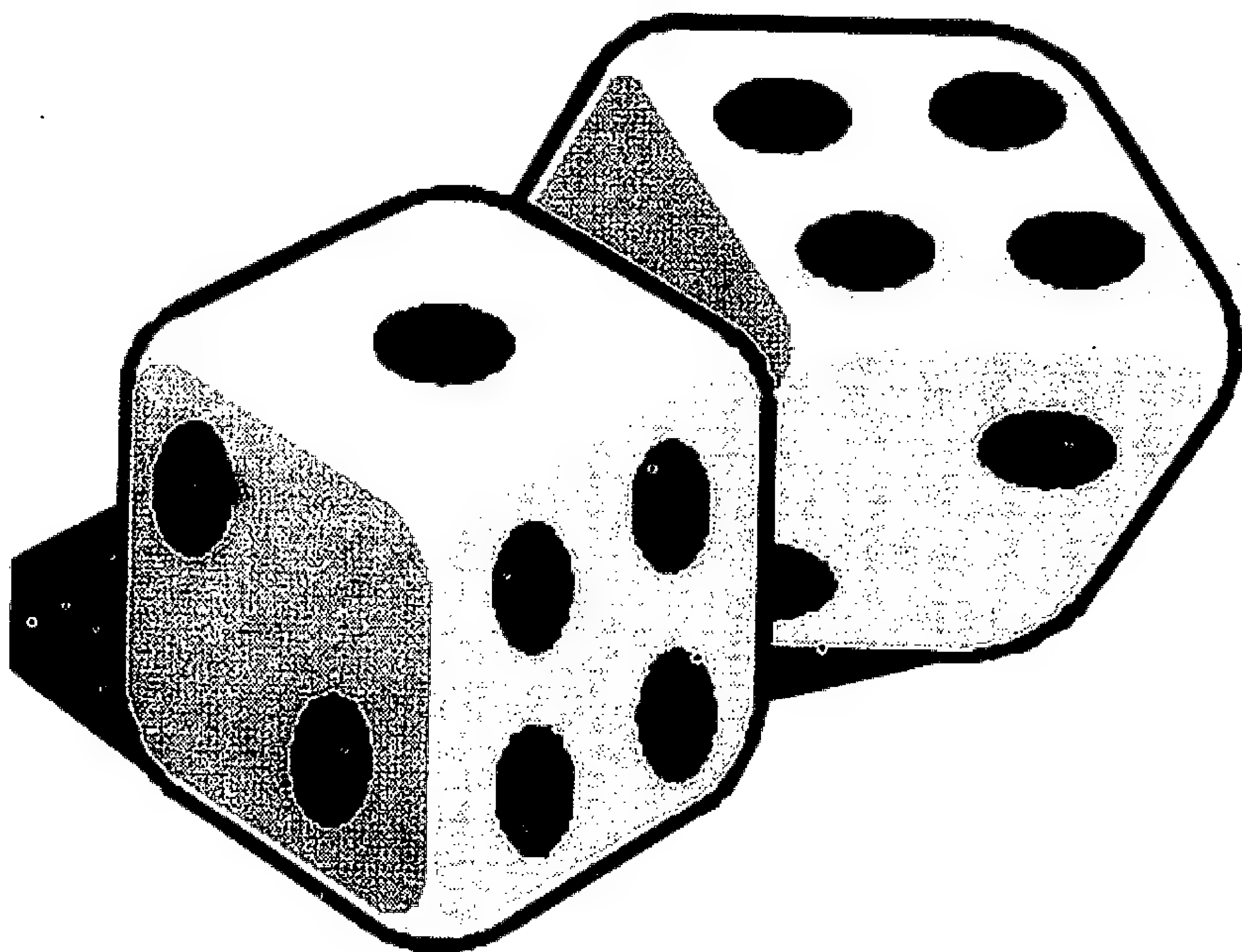
服务员觉得奇怪,看你一眼,但是决定不再询问你的动机,并且满足你的要求.

你的动机是什么呢? 你假定单身旅客会首先挑选靠近走廊或窗户的座位,然后再选中间的座位,你在这趟班机上选取了第 7 排三个相连座位中的左右两座,包围出当中一个额外的空位置来.[当然你还知道,这趟班机乘客很少,起飞后会有许多位置空在那里,所以你这两个座位之间的空档不会有任何乘客看中,你可以买两张票,享受三个座位.]你正在运用对策论[1]. 无论你是在购买汽车,出售你的房屋,还是玩扑克牌——对策论的原理都很有用. 也不论是否两个国家正在进行贸易协

---

[1] 对策论是 J. 诺伊曼(J. von Neumann)和 O. 摩根斯坦(O. Morgenstem)1944 年在他们的书《对策论与经济行为》中正式引进的. 从那以后,数学家们分析游戏和对策,并且将它们数学化,其中包括棋盘上的游戏、纸牌游戏,或者生活中的对策. 有一种电脑游戏,叫做“生命”,是 J. 康威在 1970 年发明的,用图形说明了对策论的基本原理. 游戏开始时,在计算机荧屏上选择一些初始像素. 然后,应用康威制定的规则,让像素空置或着色,结果使计算机屏幕填满了有趣的图案.

定谈判，解决边界争端，或是军备竞赛——对策论的策略都有用武之地.



著名的"囚犯难题"，是 A. 塔克（A. Tucker）在 1950 年首先提出的. 有两个人被拘捕，在隔开的房间里被分别审讯. 每个人直接面临下列各项选择：

（a）如果你和你的同伙保持沉默，有充足证据判你们每人 2 年徒刑.

（b）如果你坦白，你的同伙抗拒，那么你无罪释放，你的同伙坐 4 年牢狱.

（c）如果你们两人都承认犯罪，那么你们都在牢房里关 3 年.

你能抓住机会，保持沉默吗？那就意味着或者坐 4 年牢，或者坐 2 年牢. 你应该交代吗——那样会或者判刑 3 年，或者自由回家. 这种局面，对于每个嫌疑人，都是一次性的选择. 如果你无法预料同伴将会如何行动，最好选择承认. 但是，如果你有机会重复地"玩"这个"游戏"，你的行动将能影响你对手的行动. 你将如何反应的情况，能被传递出去. 例如，X 公司和 Y 公司刚刚开始做生意. X 提供产品给 Y. X 根据 Y 的订单供货，并且送去账单. 可以在收到货物以后付款. 一个月过去了，货

款分文未付. X 公司是否应该再送一份账单给 Y 提醒注意,还是先打电话给 Y 公司的会计呢? X 公司打了电话,获悉 Y 公司认为从来没有收到过账单,而且事实上,Y 公司想要再订一批货. X 公司说,订货将会尽快送到,只要 Y 公司把账单上的钱付清. 对于第二次订货,Y 公司货物到手,又不付账了. 现在 X 公司不再致以彬彬有礼的电话,也不给予宽限期,而是再次提交账单给 Y 公司,账单里列举了财务费用. 这是你的典型针锋相对态势. 这里的最佳对策,第一招总是采取合作,观察你的对手如何行动. 然后,你的下一步行动,要看你那对手的前面一步如何动作来决定. 这种局势从合作开始,然后交锋,跟随着一个适当的反应,可望带来再一次合作.

甚至连"胆小鬼"游戏也可以数学化. 在这里,驾驶员们驱车向前,互相比赛. 谁最先转弯,谁就输了. 有下面几种可能结局:

——两辆车都遇到车祸,因为没有一位驾驶员转弯,结果谁也没有赢;

——两位驾驶员同时转弯,大家都没有赢,也不丢面子(和局);

——其中一位驾驶员比另一位先转弯,于是后转弯的那一位赢了.

为了将这个游戏数学化,给各种可能结局分配数目如下——碰撞得 0 分;赢一次 2 分;转弯一次 1 分. 这些分数可以列成表格.

对策论突然出现在所有方面——在包含争辩的环境里,例如为了立法,或是为了清洁空气和反对污染;——又如医疗保险公司决定谁应该接收什么治疗,等等. 诸如此类,不胜枚举.

每当对立势力互相斗争的时候,例如工人罢工、政治争论、与劫持人质的恐怖份子摊牌,在这类情形下,对策论原理总能再次大显身手. 从数学上分析可能的高潮或结局,以及可能的选择、行动、反应,可以帮助决策处理. 不幸,在"生活中的对策"里,不可能识别所有影响结局的因素,并且给它们分配数值. 甚至利用概率也不能预测人类的行为. 而且,在涉及个性和自我的地方,结果可能导致混沌. 在决定性的分析里,只要分析不结束,对策就不会结束!

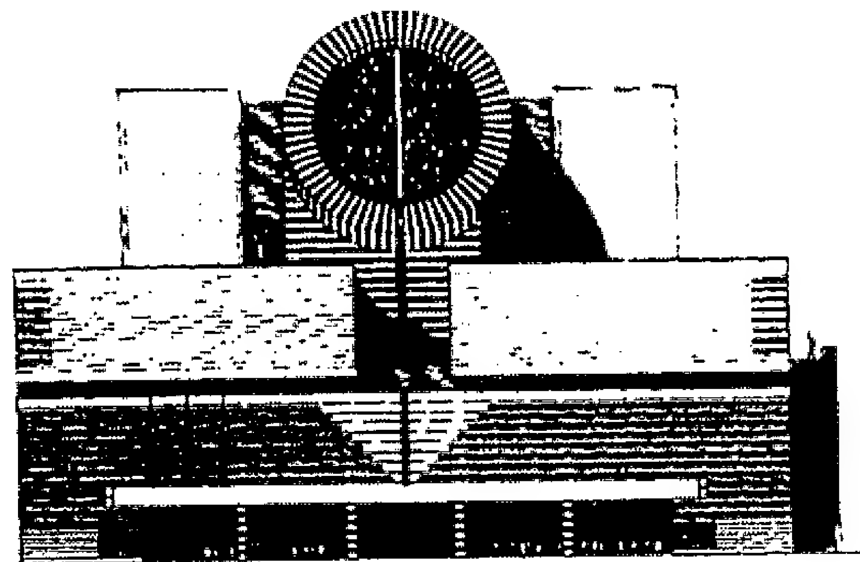
数学的本质是它的自由.

——G. 康托尔[Georg Cantor，德国数学家，1845—1918 年]

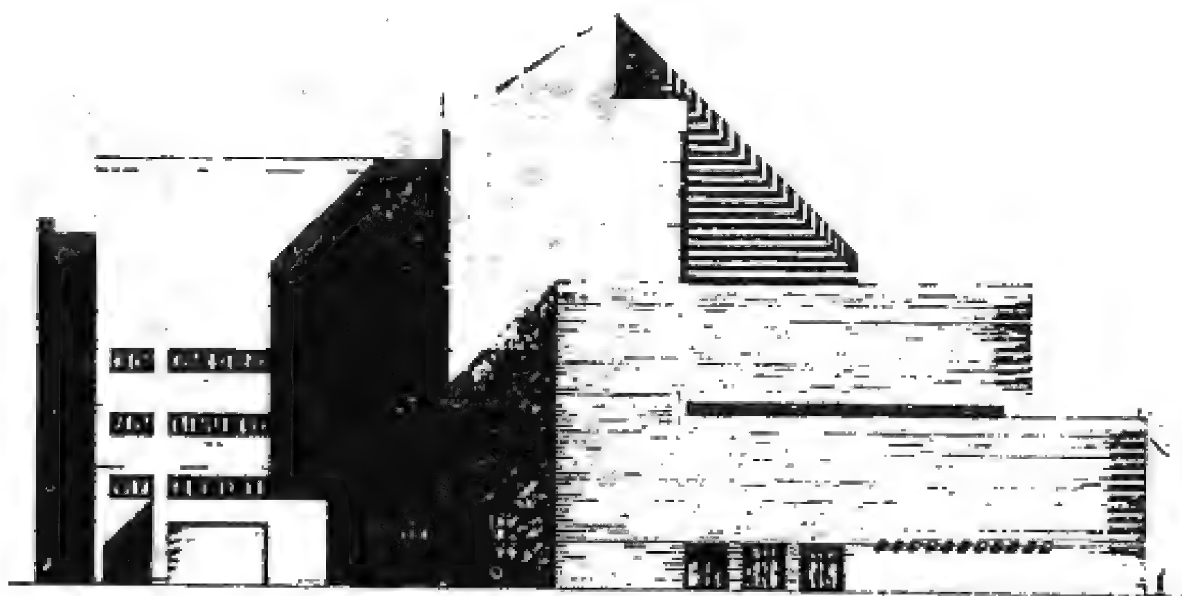
数学与旧金山现代美术馆的建筑

今天的建筑师们创造的一些设计，是过去不可能有的，因为以前的数学、材料和工具还没有发展到现在这种地步.

例如帝国大厦，或者古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆，这些建筑令人敬畏. 1996 年又建成了旧金山现代美术馆(SFMOMA). 从旧金山现代美术馆开放的那一天起，它就成为关注的焦点. 参观美术馆的人们，每天排着长队，走进这幢建筑物，一睹风采. 站在馆外附近抬头仰望，可以看见旧金山现代美术馆外部精巧平衡的几何形状、对称性，以及不同凡响的正面，而它的内部更是让人大饱眼福. 担任设计的瑞士建筑师 M. 博塔(M. Botta)说："真正的挑战是发现完美的平衡，在那里，建筑与艺术相辅相成."博塔创造他的这幢建筑物时，利用经典的轴对称观念. 一条竖直线，把建筑物的前视图分成互相对称的两半部. 人们惊奇地看到，这个对称利用了如此多变的几何形状组合. 在前视的透视中，大楼结构呈现多种 2 维图形，包括矩形、正方形、圆和椭圆. 而侧面和背面又增加了三角形和半圆. 这种不寻常的组合(圆、矩形和三角形)使结构增添活力，观众会猜想，这些平面形状组合以后，将会在建筑物外部和内部产生怎样的 3 维形体呢? 走近这座美术馆，觉得它的外表像一座城堡——粗大的长方体，对称地堆积排列，用泥土色



美国旧金山现代美术馆前视图.
旧金山现代美术馆允许使用.



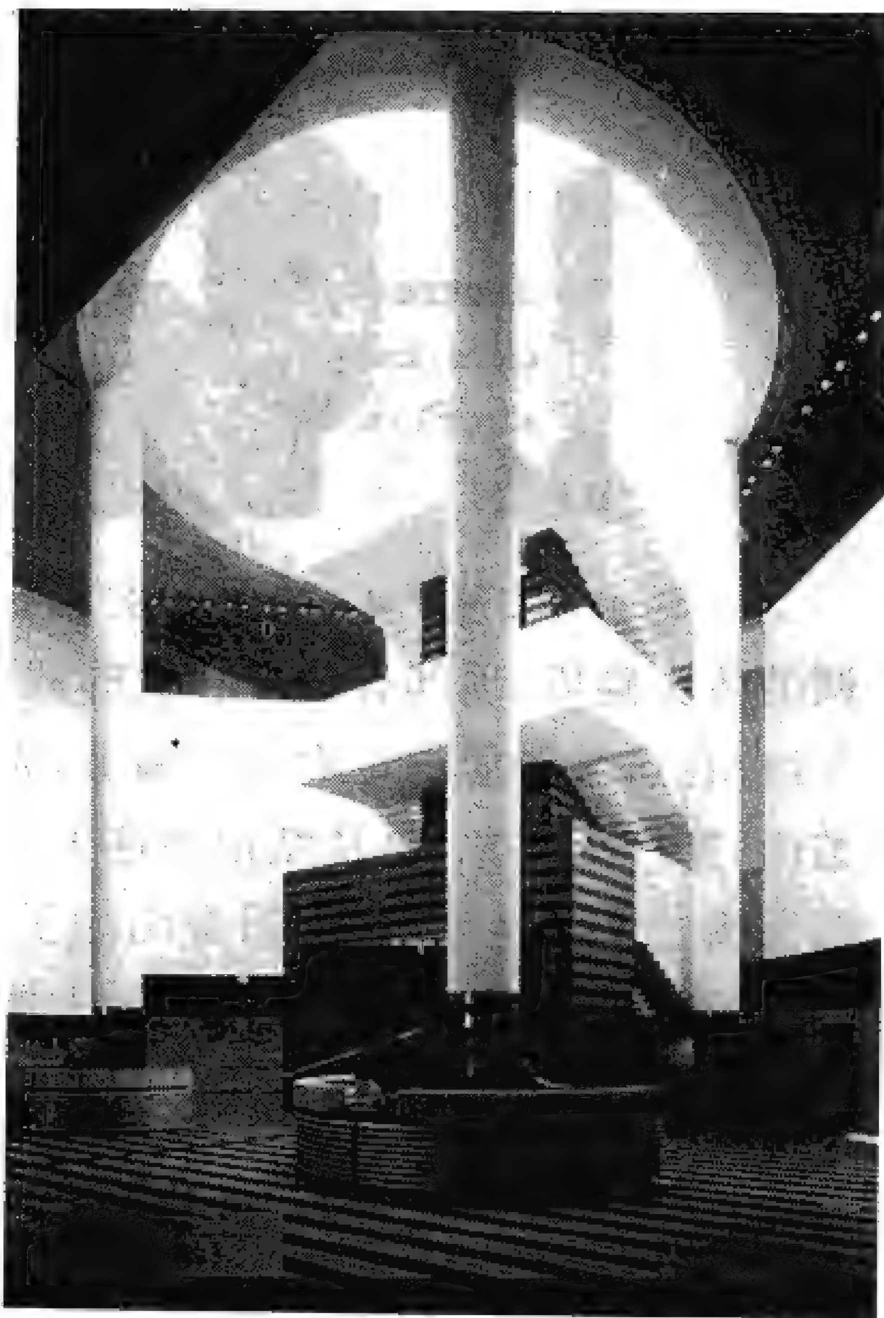
旧金山现代美术馆侧视图. 旧金山现代美术馆允许使用.

调的砖头砌成，顶部有一个壮观的截顶圆柱，衬托着黑白对比的花岗岩条纹. 在这城堡似的正面大片墙上，完全没有窗户，格外引人注目. 进入馆内，第一眼印象，是从截顶圆柱天窗流淌进来的自然光. 到了夜晚，这扇天窗的作用逆转，成为旧金山城里的一座灯塔. 圆柱截面的斜角，使进入馆内中心广场的阳光达到最大值. 正如博塔指出的，"中庭，这幢大



旧金山现代美术馆. R. 巴姆斯(R. Bames)摄影，旧金山现代美术馆许可.
©旧金山现代美术馆，1994.

楼的真正心脏，是整个美术馆空间的重心.在馆内，应该能感觉到所有环绕和确定中庭的那些部分之间的组织结构和空间关系.……它是一个利用建筑技术描画的空间，天窗的形式像是一种屋檐，从上面透进来的光线，照亮……访问美术馆的客人.上层的画廊，具有柔和与平静的建筑风格，……它们的空间用来展示……美术作品."[1]进入美术馆内，可以找到用宽阔的天花板和交错的水平面巧妙隐藏的五层楼.当我们走进楼里，开始探索，很容易就会发现新的楼层，那粗厚的黑色花岗岩楼梯井，仿佛正在邀请访问者登楼参观.中心广场的楼梯，既是一件艺术作品，又是一幅视幻图形.楼梯井中朝下的面，以及墙壁上黑色和灰色对比的花岗岩条纹，这两者共同组成一幅摆动型视幻图形，使楼梯井朝下的面看在眼里，会觉得前后翻转，产生错觉，类似于埃歇的画《凸与凹》.在这座美术馆的设计中，窗户很少，都在侧面墙上，因而能使墙面达到最大，用来展示更多的美术作品.尽管窗户很少，但是博塔的建筑设计仍然让自然光慷慨地照耀所有楼层中绝大多数画廊，因为他创造性地利用可调节大天窗采光，还采用了特别设计的弯曲透明镶嵌板[2].为了达到这种最佳照明效果，博塔深入研究采光，他按照美



旧金山现代美术馆内的楼梯井.
R.巴姆斯摄影，旧金山现代美术馆许可.
©旧金山现代美术馆，1994.

[1] 旧金山现代美术馆印刷品：Marlo Botta, *The Architect & His Philosophy*.

[2] 弗拉克和库尔茨工程顾问公司花费三年时间研制成这些天窗.

术馆的尺寸比例,在现场制作了一个模型,观察在一天中不同时间的光照情况.虽然这座美术馆是设计用来收藏现代艺术的,它自己却也是一件艺术作品,并且收藏着珍贵的活生生的数学对象和数学观念.

新发现的每一个生物体都是一种数学形式，因为没有其他原理能够指导我们.

——C. 达尔文[英国生物学家，1809—1882 年]

音乐、物质和数学

你是否曾在房间里感觉到某种影响你的事物？或许它是室内喷泉的电动机嗡嗡声，外面过路汽车警报器的尖叫声，一首悦耳动听的乐曲声，或是各种不同的声音、噪音、振动——呼呼响的风扇声、吱吱叫的拉锯声、唱歌一般的鸟鸣声. 有些声音悦耳，有些声音刺耳，还有一些使我们感觉不舒服.

有关音乐和声音的能量的记载，可以追溯到许多世纪以前. 在古代希腊的荷马史诗《奥德赛》中，我们读到几个叫做"塞壬"的海上女妖的歌声，以及她们如何夺取航海人的性命. 在《奥德赛》中还说到，女巫喀尔刻警告奥德修斯，塞壬的歌声很危险，她说："……谁都不要太靠近塞壬的小岛，……那些妖女的歌声高昂，毛骨悚然，使人听了变呆，她们在自己的草地上闲逛，在她们周围堆积着尸体……"[1]亚里斯多德(Aristotle)说："身体的运动……产生噪音，……太阳和月亮……以及所有的星体……这样飞快地移动，它们怎么不产生一种响亮无比的声音呢？从这个论点出发，通过观察它们的速度，测量它们的距离，发现比例像音乐一样和谐. ……星球作圆周运动产生的声音是一种和弦."[2]古代的毕达哥拉斯学派发现，在音乐和数学之间，有一种先天的关联，数学里的比值，在八度音阶中表现出一种特别的作用. 他们觉得，数与音乐相联系，是一种使宇宙保持秩序的方法，他们还认为天体运动产生乐曲声，它由天体的速度和到地球的距离决定. 虽然"球的音

---

[1] *The Odyssey*, by Homer, 由 Robert Fagels 翻译. p. 272.

[2] *The Works of Aristotle*, volume 2, 由 J. L. Stocks 翻译, Oxford University Press, 1930.

乐”这种观念起源于毕达哥拉斯学派，它却影响到另外一些科学家，例如J.开普勒，他将行星在其椭圆轨道上的速度联系到音乐里的和弦，并为那时已知的每颗行星编写了乐曲.

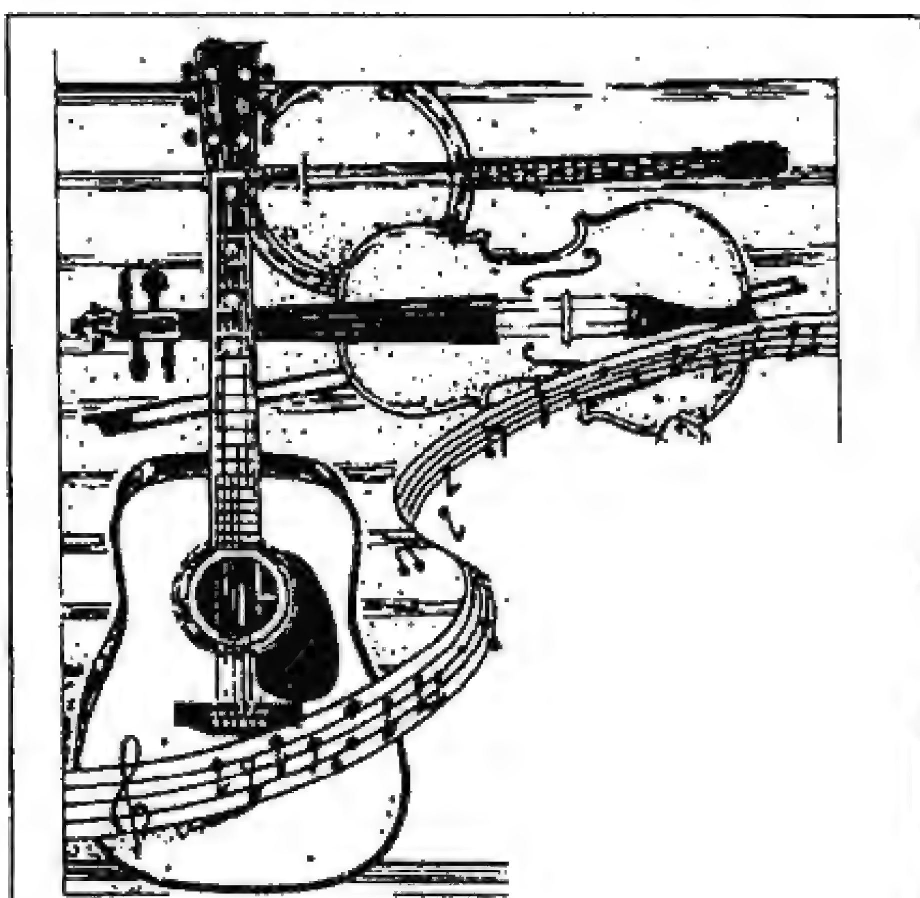
现今有许多发现，涉及音乐对我们生活的多方面影响.有一项研究揭示，正规音乐教育可对儿童的空间智力起积极影响(美国《科学新闻》,1994年8月27日，《年轻头脑的“调音”》).美国加州大学欧文镇分校的一项研究表明，学生听10分钟莫扎特的《D大调钢琴二重奏》(K.448),可以提高他们在即时空间推理测试中的智商得分(技巧与数学有关).怎样解释这种现象呢？据信，莫扎特的乐曲可以加强神经的联系，这正是数学思考的基础.此外，一些研究人员发现，这首奏鸣曲也使癫痫患者减少发作，还使阿尔兹海默氏[痴呆]病患者改善了即时空间推理.我们知道，我们的身体用各种生理方式对声音、歌曲、音乐和振动产生反应.讨厌的喧闹声能引起我们的血压上升，压缩血管，加快我们的心跳和呼吸速度.游行队伍里的乐队重击低音鼓，会影响人的心跳节奏.声音甚至能改变我们血液中的脂肪和镁的水平.噪音的大小，未必是引起烦躁忧虑的因素.其实，沉默和轻微的刺耳声音也有消极影响.

音乐总是陪伴在我们周围，而帮助音乐传遍四方的，正是数学.数学说明声音怎样从声源出发，在三维空间中旅行，并且利用它的音调、音量和音质的特性，产生描述声音的曲线和方程(正弦方程[3]).现在数学家把正弦曲线的观念扩大到小波，用它来描述振动或图形.科学家利用这些方程和视觉描绘，来绘制地震图，评估心跳节奏，甚至描述指纹.

如今，物理学家提出了一种难以置信的宇宙音乐感应观念.但它现在不再是球的音乐，而是弦的音乐——即所谓超弦.[以前的理论认为原子的形状像一个小小的球，超弦理论则认为基本粒子像小小的环，这些基本的线或环叫做“弦”，因为这些弦非常小，所以叫做“超弦”.]这些无穷小弦，可能通过它们的振动方式，包含着物质和能量本质的秘密.

[3] 在这些方程中，音调与频率有关，音量与振幅有关，音质与周期曲线的形状有关.

弦论[4]认为，这些超弦是组成宇宙的基本成分，是一种有别于其他理论的物质和能量的形式. 这些超弦，家住何方？浩瀚宇宙，处处为家，深居在所有物质和能量之中——压缩[5]在高维几何框架里，其性质依然保持神秘，但是它的美妙数学理论与物理概念却能珠联璧合. 弦论有许多流派. 其中有一种，把"弦"叫做 hererotic，并且描述为沿顺时针或反时针方向振动的闭合弦. 顺时针的置身于一个 10 维空间中，而反时针的则是在一个 26 维空间中，其中有 16 维被压缩. 弦论处理 10 维和 26 维空间，并且是唯一的需要固定时空维数的量子理论. 为什么是 10 和 26？物理学家还没有找到线索[6]. 仅仅因为这时弦和它们的振动能从数学上完美表现，并且包含爱因斯



宇宙中的弦振动……

物质和能量的确定……

压缩在 10 维和 26 维中

[4] 弦论有很多流派，但是他们都继承了共同的来源，就是美国加州工学院的 J. 施瓦兹(J. Schwarz)和英国伦敦女王玛莉学院的 M. 格林(M. Green)的工作. 这两个人证明了弦论中遇见的所有自相容条件.

[5] 为了获得关于压缩世界的感觉，想象一个 0 维世界. 假定能将 3 维世界压缩成一个单独的点，那么就得到 0 维世界. 实际上，如果在 3 维空间中，一个球面的半径小得测不出来，就可以把它当成 0 维的.

[6] 这些数首先出现在印度数学家拉玛努让(Srinivasa Ramanujan)的模函数研究工作里，拉玛努让函数在弦论计算中多次出现.

坦方程和引力理论——它使爱因斯坦理论与量子论和谐共处，没有数学障碍．所以，为什么不采用一种这样的弦论呢？不过，暂时还没有办法证明它们．有很多关于宇宙的理论在不断发展，但是，从中选择哪一个，唯一合理的方法是获得证明．而在科学中，“证明”并不意味着所有的方程都能解出，结论彼此相容，也不只意味着一个数学的证明——它的含义是具体的观察证据．

还有些什么其他的数学和音乐的联系呢？

——利用 DNA 所含的四种碱基，可将 DNA 双螺旋表示成音乐．一段乐曲能变成可视的，这时图形中的重复序列可看成歌曲中的重复唱段．这些“音乐”图案，曾被美国加利福尼亚州杜阿尔特的希望城贝克曼研究院理论生物学部大野乾(Susumo Ohno)博士探索过．

——数学曲线在许多乐器的外形中起了重要作用，这里包括弦乐器、打击乐器和吹奏乐器．

——计算机模型和数字音乐是一片广阔天地．数学与声学结合，被用来确定声学建筑物的形状．

——数学家正在将分形与音乐挂钩．某些递归数列，例如

0，1，1，2，1，2，2，3，1，2，2，3，2，3，3，4…

计算从 0 开始的连续二进制数字中所含 1 的个数，得到上述数列．这个数列可以编成乐谱．作曲家的乐曲片段，被数学家拿来研究，作为内在的分形性质．物理学家和现代作曲家 G．利格提(G. Ligeti)在他的某些作品中有意识地利用分形，例如他的《钢琴练习曲》．利用音乐还研究了分形的另外一些性质．

哪里有音乐，哪里就有数学．用 J．J．西尔维斯特的话来说，“可否将音乐描述成有感觉的数学，数学则是有理由的音乐呢？”

在小的里面没有最小的，大的里面没有最大的；但是总有某物更小，某物更大.

——阿那克萨哥拉[Anaxagoras，古希腊哲学家，约公元前500—前428年]

纳米技术

在数学里，经常有一些微小精细的对象. 欧氏几何中的点没有大小. 从技术上说，它们是看不见的，只被用来指明一个物体的位置. 事实上，一条线段由无限多个点组成. 任何两点之间，总能找到其他的点. 在微积分的世界里，依靠无穷小，解决它的许多问题. 在分形世界里，分形可以把它自己复制成较小的相似图形，这种自相似复制过程可以无限继续，没有最小的图形. 在数的世界里，微小数量一个不漏，因为没有最小的数，也没有最大的数. 因此，为了描述和量化纳米世界[1]的对象，数学是一个完美的媒体. 说起纳米技术，可以用成语"微乎其微"来形容. 纳米技术和它的所有可能分支，令人将信将疑. 五十年前，我们能想象利用数码技术制造的产品吗？谁能料到计算机对我们日常生活各方面的巨大影响，从医药，到银行、消费、治安、娱乐、通讯，等等. 如今，普通人也能拥有并会使用手机、扫描仪、传真机、个人计算机、CD放音机、手提摄像机、微波炉、智能卡……纳米技术会带来类似的革命性变化吗？

若干年前，谁能相信，可以把一架照相机喂进你的喉咙，到你的胃和肠里拍照，或者，计算机芯片这么小，但是微型计算机竟然能代替20世纪60年代笨重的大型计算机？现在想象一个小到肉眼看不见的机器人，或者一台只有细菌那么大的计算机. 遥不可及吗？随着现代计算

---

[1] 体会一下纳米世界事物的大小——纳米是1米的十亿分之一. 毫微秒是1秒的十亿分之一. 一个电脉冲在1毫微秒内前进8英寸[约20厘米]. 光在1毫微秒内前进1英尺[约30厘米].

机的脚步，英文前缀 nano-[“纳”或“毫微”][2]进入了 20 世纪新术语之家. 下面是一部分纳米系列术语[英文词头为 nano]的列表——•纳米技术•毫微级计算机•纳米潜水艇•毫微秒示波器•纳米管•毫微成分•毫微电路•毫微汇编程序•纳米结构•纳米工程. 这许多新名词，强烈显示出超微型世界正在进入主流，信不信由你.

确切地说，什么是纳米世界? 它是在原子和分子大小的尺度上拥有各种功能的世界. 纳米技术包含分子机和一些微型器具，用它们来形成和利用物质——所有类型的物质(有生命的和无生命的)——过程精细到以原子为单位或以分子为单位. R. 费曼(R. Feynman)在他想象如何将机器设计得小而又小时，曾经说起这样一个世界. 不过，在今天的纳米技术中，许多工作正在沿着 E. 德雷克斯勒(E. Drexler)想象的路线前进. 德雷克斯勒设想，不再沿用自上而下的工作方式，而是直接操作原子和分子，建造超微型机器. 他在原子水平上利用各种物质的自然形态，例如 DNA、蛋白质[3]、脂类、缩氨酸，等等. 德雷克斯勒创造性地利用各种纳米工具，对原子和分子进行操作，相信能在纳米世界中同样获得无数种形态.

> 大小如何?
> - 微米是一米的百万分之一.
> - 纳米是一米的十亿分之一.
> - 皮米是一米的万亿分之一.

虽然纳米技术观念的酝酿只有几十年，纳米科学家、纳米工程师和纳米研究人员却已取得重大进展，并且在原子大小的尺度上实际做了一些事情.

科学家们怎样去做他们看不见的事呢? 尽管肉眼看不见原子、分子和其他毫微成分，新技术却能控制它们. 利用分子结构的知识，配合

---

[2] nano-[“纳”或“毫微”]意为某物大小的十亿分之一 $\left(\frac{1}{1\,000\,000\,000}\right)$. 例如，毫微克是 1 克重量的十亿分之一.

[3] 例如，蛋白质是一种天然的毫微级计算机，能操纵物质中的原子，并且利用 DNA 的代码和程序，复制它们自己.

现代科技工具,现在已能操作分子和原子.用各种扫描探针显微镜[4]

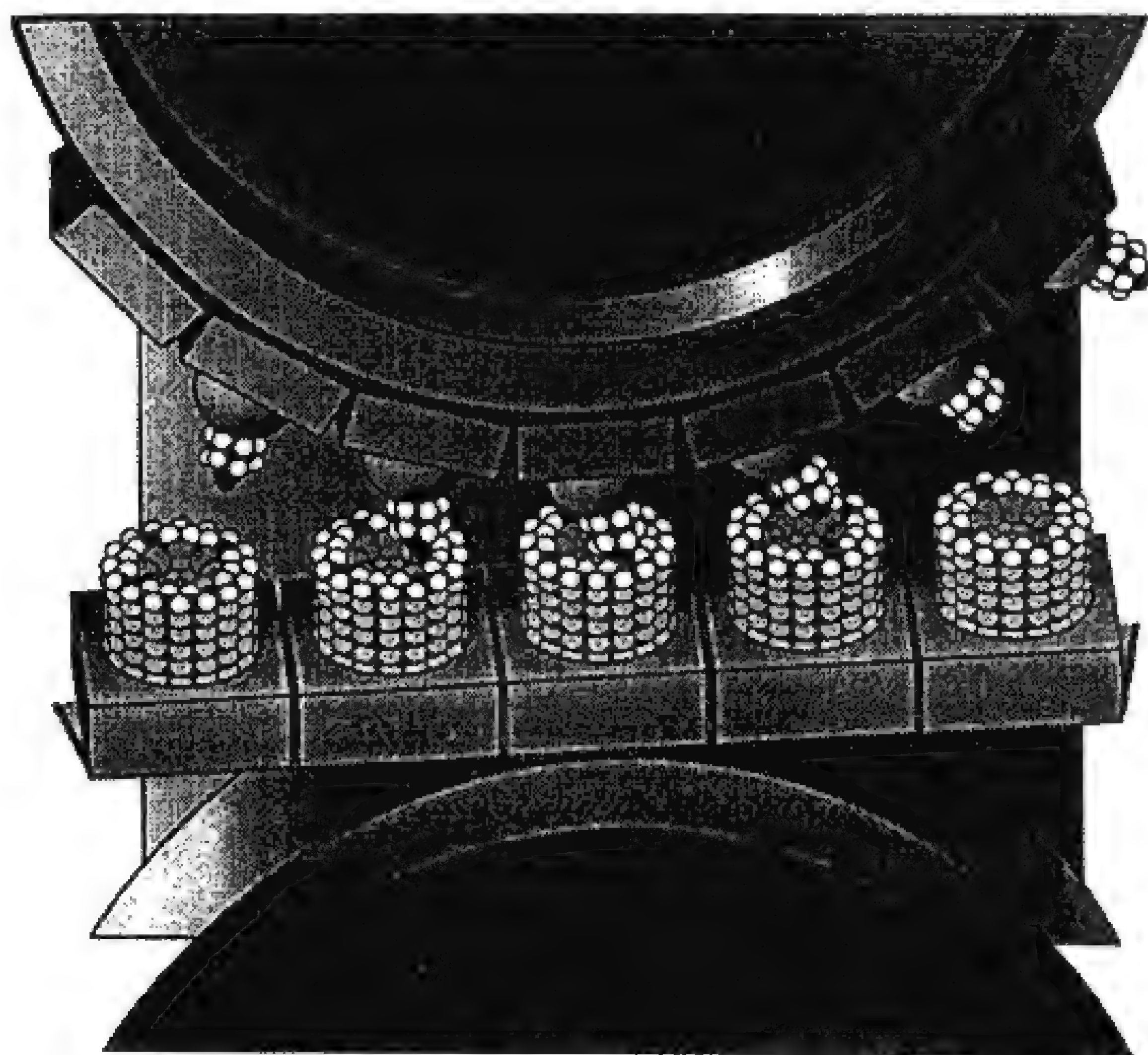


示意图:析出氢原子系列的工具(上),氢原子排列成圆柱形工件系列(下).© Copyright 1993 K. Eric Drexler.版权所有.

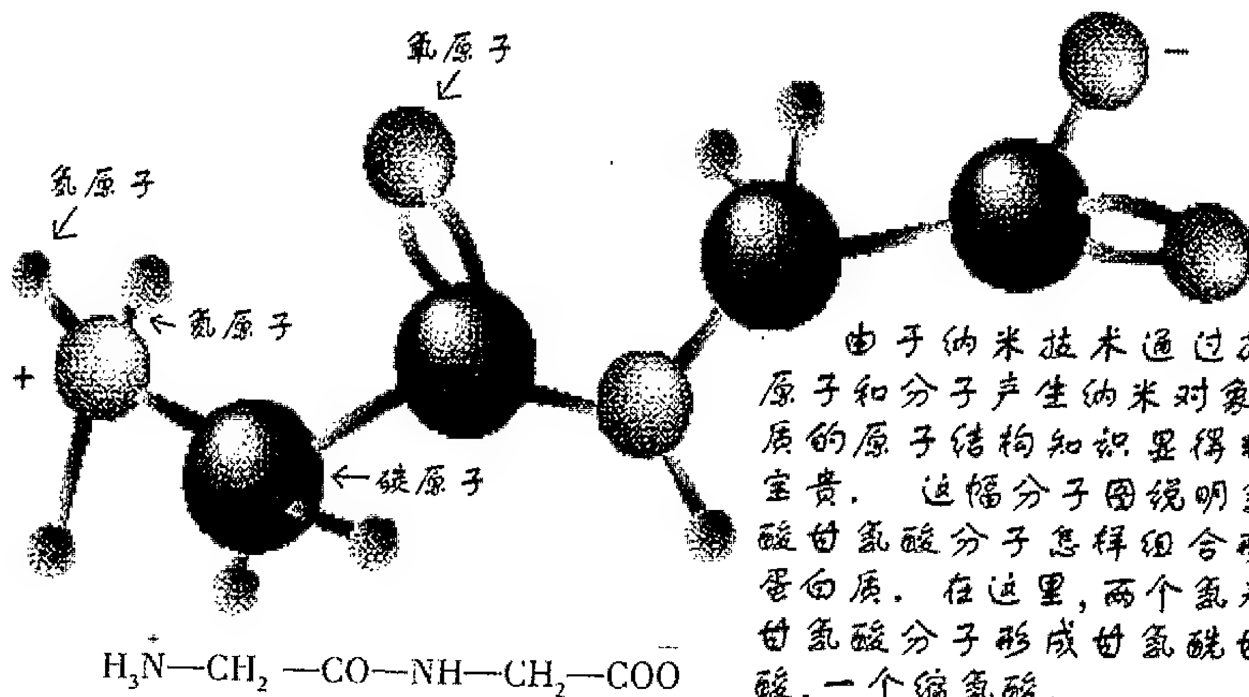
武装起来的研究人员,在室温下,将原子和分子沿着"平"面推动、探测位置和改变位置.当然,说起来容易,做起来难,因为必须发明一种技术,防止分子在温度改变时过于兴奋,活蹦乱跳.此外,虚拟现实技术改进了观察工作,使科学家能体验一个虚幻3维空间中的分子场面.这项技术利用普通显示器,在2维屏幕上显示逼真的3维效果.纳米尺度的研究,同时在生物学、化学和物理学领域中展开,而数学则是这项研究中必不可少的.

至今纳米技术已有哪些进展?

五年以前,毫微级计算机和毫微级工具只不过是计算机模拟模型而已.

---

[4] 其中包括STM(扫描隧道显微镜)、SPM(扫描探针显微镜)、AFM(原子力显微镜)、MRFM(磁共振力显微镜).



由于纳米技术通过操作原子和分子产生纳米对象，物质的原子结构知识显得非常宝贵. 这幅分子图说明氨基酸甘氨酸分子怎样组合形成蛋白质. 在这里，两个氨基酸甘氨酸分子形成甘氨酰甘氨酸，一个缩氨酸.

今天——

• 在荷兰，德尔特工业大学的研究人员制作了一个像镊子一样的工具，可以“夹住”纳米大小的粒子簇，即在两块电极之间捕获它们. 美国亚利桑那州立大学的研究人员也配合 STM 的使用，发展了纳米镊子. 他们利用一个电压脉冲，耐心地把原子推到纳米镊的尖端. 在这过程中，用各种测量方法来识别原子.

• 用碳原子制成了纳米管和纳米轴承. 科学家发现，其中有些导电，而另外一些的通道被堵塞. 造出了分子轮和螺旋桨形状的分子，在室温下，它们能在一个类似于轴承结构的圆周上快速旋转.

• 制成了环形蛋白质片段，放进缩氨酸纳米管. 它们可用作通道，让离子和分子通过，进而可用来把抗生素送往某些特定细胞.

• 在生物学中，已经在肾结石里发现了纳米细菌（大小从 50 到 500 纳米）. 这些发现有望用于研究人体机能失调，例如动脉硬化、癌症、关节炎和不明原因的钙沉积. 通常细菌的大小约为 1 微米（即 1 000 纳米[原文误为 100 纳米]）.

• 纳米管已被连接到环形葡萄糖分子链中，叫做环式糊精. 管道对于活着的生物体很重要. 在细胞功能中，毛细管道充当输送纽带，移动它附近的不同化合物. 在生物化学方面，它们可用于药物传输系统，作为分开离子和分子的一种方法，或者作为催化剂. 商业上，因为它们的尺寸特别小，所以它们能显著改善化妆品中滞留的潮湿气.

• 发明了一种利用电化学培养细菌的有效方法.

• 各种扫描探针显微镜已能适应在多种条件和温度下工作，例如，STM 被用来作为原子刀，AFM 的末端被用来感觉细胞壁变软的部位，那就是病毒穿越的地方. MRFM 正被用来促进发展 3 维原子成像技术，它将使科学家能看到在固定位置上的单个原子.

• 为了说明纳米制造技术，科梅尔大学的研究人员制造了微型吉他，其琴弦粗细等于 100 个原子的宽度. 纳米算盘也被造出来了，算盘珠是用巴基球做的. [巴基球是由 60 个碳原子排列成足球多面体形状的一种空心小球.]

• 18 世纪法国物理学家 Ch. A. 库仑(Ch. A. de Columb)发明的静电计，已被按比例将尺寸缩小到只有几微米.

前景如何?

纳米技术提供的可能性，令人惊异，难以置信. 其中包括：

• 毫微级计算机，它们的形状可以改变，就是说，它们能忍受变形，适应手头任务的需要，为此只需简单地改变单位软件. 这就像分形变形机器人，能够适应手边的任务.

• 生物学的或综合性的毫微级计算机，它们是自我复制的和自行装配的.

• 纳米技术研究人员设想，将会有一个由于纳米技术科学而彻底革命的地球. 一个拥有毫微级计算机指导万亿个单元的装配线的地球. 毫微级计算机将能自我装配、自身复制. 分形移位机器人将能改变它们的形状，以便处理手边任务，为此只需简单地变更它们的软件. 任务将包括——清除有毒废料(在这方面已经用过生物学单位)，清除污染，直接将药物送往生病的细胞，修复受伤细胞——纳米园艺单位将会清除院子里的杂草，准备肥沃的土壤——纳米家务单位将会打扫和清理——食品将从它们的原子状态装配，像《星际旅行》里那样复制——废品和垃圾将能再生，通过纳米单位返回其原子和分子形式，以后再用来制造其他产品. 如此等等.

用纳米科学全面管理的地球，将没有饥荒，没有疾病，没有物资短

缺.毫无问题吗？也许.这些纳米计算机,难道不会有些纳米小故障？纳米小故障是否可能引起纳米突变？社会的和心理的适应,是一个大问题.今天,我们见到,有许多人,他们难以接受将他们亲眼看见和实际拥有的某些事物与计算机联系起来.然而,在现代医学诊断技术中,将微型照相机喂进喉咙,沿食道而下,拍摄体内情形,或者经过腹股沟,进入动脉,加之遗传工程问世,人们对于微小的看不见的世界将不再有异国他乡的感觉.

纳米世界是否像正在得到的或可能得到的一样小？非也.人们还在谈论更细微的皮米技术.但是,也许超弦世界的尺度会比纳米单位和皮米单位更小,甚至将来或许会用弦作为物质的组成单位——在高维中压缩的弦,实际上不是用原子定义的,而是用它们的振动定义的.我们可以肯定,纳米世界必然是走向未来世界的一级台阶.

单身男人找到一个与他自己共享世界的奇怪新物种：计算机.……

——M. 明斯基[Marvin Minsky，美国科学家，1927—　　，人工智能四大领袖之一]

软计算

——处理计算机信息的一种新方法

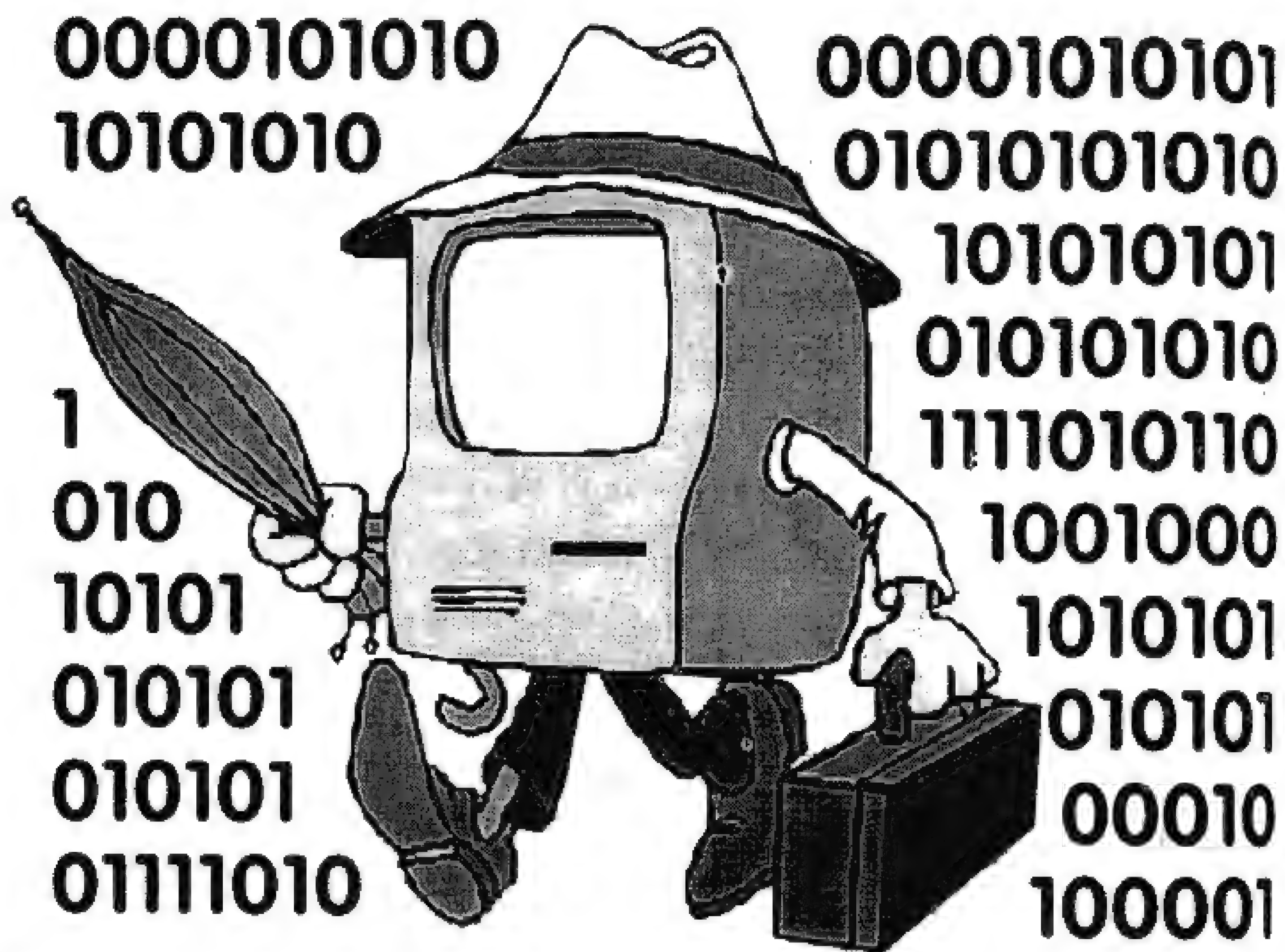
软计算大概是最难发展的计算类型之一. 名软实不软，其实在这种算法里综合运用了一些坚强有力的数学分支. 软计算不能简单地依赖于传统的“是、非”逻辑. 这里的命题不再仅仅考虑真或假，而是计算它的真实或虚假的程度. 这里的情况可能并非只有两种选择——是或不是. 不确定的情形或许也已引人注目. 在软计算中，包含一定程度含糊不清的认知推理，以及不确定的部分. 但是，确切地说，**什么是软计算呢？**它是这样新颖，还没有来得及清楚地定义——不妨把它描述为：没有硬计算的特性. “真、假”的逻辑、精密和迅速，这些是硬计算的根本特性. 模糊逻辑、神经网络、近似推理、很容易使用、具有创造性，这些可以用来描述软计算. 软计算将能处理不严密、不确定和部分真实的因素，直到现在硬计算还不能处理它们.

怎样做这件事呢？从软计算的发展过程看，它将依赖于概率、模糊逻辑、混沌理论、复杂性、神经科学和分形等数学领域. 一眼看去，这些方面似乎大不相同，但是数学家和科学家们发现，它们可以扩大和交叉应用.

这些领域是什么，它们做些什么事情？简而言之——

模糊逻辑——考虑真实程度. 对于一个命题，传统逻辑只给它贴上“真”或“假”的标签，而模糊逻辑却能赋予它一个介于真和假之间的数值. 它给灰色地带提供了空间.

混沌理论——研究混沌现象中的秩序. 混沌可能存在于最简单的



或最复杂的现象里，从水龙头滴水，到气象系统. 一种特别现象的未来结局，往往难以预料，因为初始条件的微小变化(也许觉察不到)，可能引起具有转折意义的结果.(通常将这种现象称为蝴蝶效应.)

非线性动力学系统——线性系统是可预期的. 相同的输入数据，总是产生相同的结果. 而对于非线性系统，特定的数据却可能产生不同结果. 变动的条件在非线性动力学系统中有很大影响.

复杂性或复杂系统——属于非线性数学领域. 在这里，相同的环境集合，并不总是产生相同的结局或解. 复杂系统具有一定的结构和秩序，试图维持它在混沌和有序之间的精巧平衡. 如果一个复杂系统突然失去平衡，它能自动恢复平衡，只需利用它的一种本能的自我组织动力学(即不断变化，使它自已适应变动的因素或环境).

神经科学——是一种处理生物生理学信息和神经网络的科学.

分形——是一种演化或生长的对象，它的产生过程，从一个基本的对象或图案开始，应用一条法则，一遍又一遍地将这图案复制并缩小，无限继续，也可能无限次复制一个变化的图案. 在产生分形时，过程、法

则或方程的重复,起了主要作用.其结果,分形几何学,一种[广义的]非欧几何学,可以模拟几乎你能想象的任何形状.

遗传基因算法——是一些供计算机应用的算法,遵循达尔文的物竞天选法则——适者生存.这里所谓"适者",规定为一个特殊问题渴望达到的目标;例如,问题可能是使发动机的燃料发挥最佳效率.遗传基因算法的思路,类似于遗传密码在活的生物体中行动的方式.一部分密码融人新创造的形式.一部分发生变异.它们相互竞争.某些部分油尽灯灭,剩余部分产生所期待的目标,这时得到最佳燃料效率,作为解而生存下来.换句话说,软件设计使它能自我发展,自我改善.〔1〕

"……软计算不是模糊逻辑、神经网络理论和近似推理的一锅大杂烩.它更像是一种合作关系,每一位合作伙伴都为提出的问题贡献自己独特的方法……"发明模糊集论的L.扎德教授这样说.〔2〕由于硬计算不能控制或处理复杂系统,描述自然现象和人类行为中遇见的系统,需要利用模糊逻辑和模糊表达方式.为了产生软计算机,需要在计算机中整合模糊逻辑、神经科学和近似推理.正如山川烈(Takeshi Yamakawa)所说,"计算机应该以心理学和哲学为基础,才会有益.如果我们把计算机看成不过是一些逻辑线路、布尔变量、晶体管技术、集成电路和微处理,那么我们决不能创造一台可以创造性思考的计算机.……为了创造计算机,……使它们有能力认知人类情感模式,……我们还有漫长的道路要走."〔3〕扎德教授指出,"在许多方面,软计算提供了一个转换计算目标的重要例子——这种转换反映了一个事实:人的智力不同于现今的计算机,对于不严密、不确定和不完整的信息,人脑具有非凡的储存和处理能力."〔4〕

---

〔1〕遗传基因算法是美国密歇根大学的J.霍兰(J. Holland)在20世纪60年代发明的.如今这些算法已获得商业应用,例如被用于生产调度和产品设计.它们正被应用到更多的方面.

〔2〕有一则电脑国际互联网消息,是1995年3月3日L.扎德教授发表的,说起了美国伯克利软计算研究所(BISC)在1994年3月13日庆祝它的第三个生日.

〔3〕山川烈是日本九州工学院的院长,被认为是一位"模糊"科学家.见*Look Japan*,December 1994.

〔4〕见注2.

数学越深入发展，它的结构越显得更加和谐统一，而且还会发现这个世界至今互不相通的分支之间未为人知的关系.

——D. 希尔伯特[David Hilbert，德国数学家，1862—1943 年]

晶体很清楚吗?

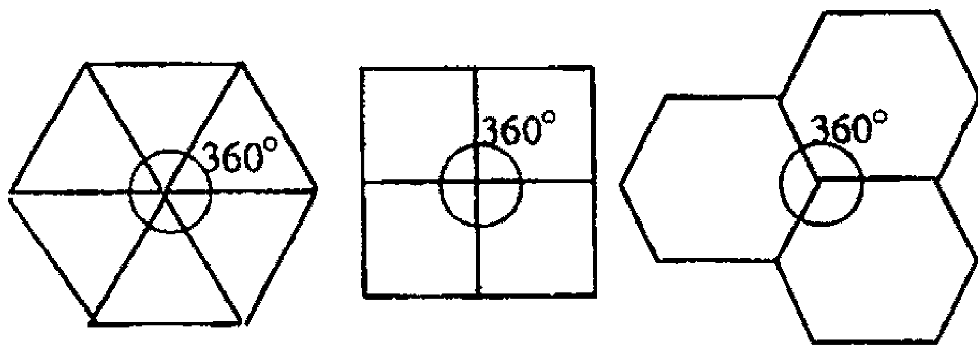
——准晶体和彭罗斯瓷砖

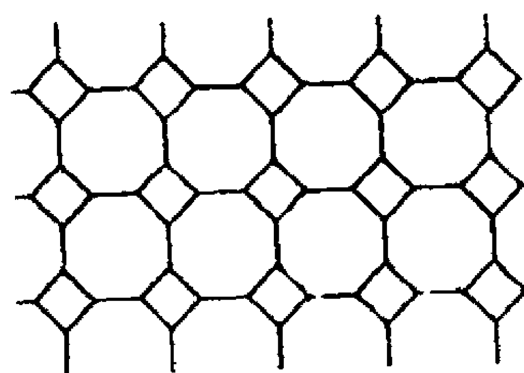
你有没有做过一项工作，发现寻找工作的过程不如你想象的那样简单? 似乎一件事总是带出另一件事，而另外这件往往是新遇见的，或是完全没有料想到的. 晶体和非周期镶嵌图也有类似情形，两者看似无关，毫无联系.

回想从前，古代镶嵌图(阿卡镶嵌图案)已被用于装饰墙壁和地面. 许多世纪以来，为了改进自己的工作，艺术家和手艺人设法了解镶嵌图案的特性，数学家设法解释镶嵌背后的数学原理. 在这里，我们遇到对称性、周期的和非周期镶嵌图的概念.

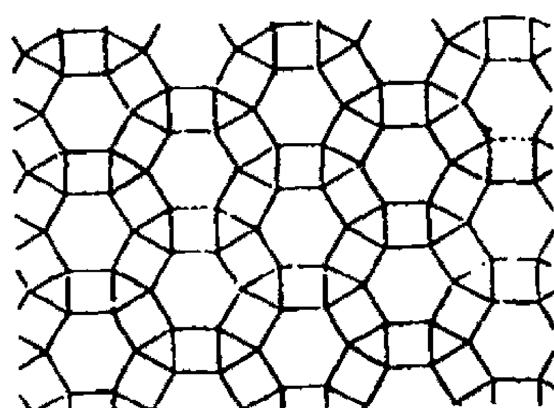
这些术语是什么意思?

同一平面内的两个图形，如果能通过关于一条直线的反射、绕一点的旋转、沿着某个方向平移，或者滑动，能使两者完全重合，就说它们互相对称. 正多边形中，只有正三角形、正方形和正六边形这三种砖头能够独自铺满平面，因为可以将它们的边重叠在一起，不留空隙(在顶点交汇处的角度之和为 360°). 可以将六个正三角形绕一个顶点拼成一圈，四个正方形也可以，三个正六边形也行. 所有其他正多边形砖头铺地，都会留下间隙.

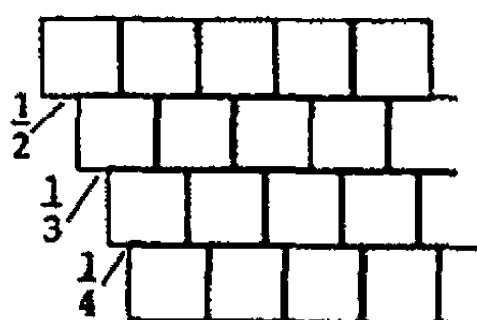




半正则镶嵌图利用两种对象产生一个镶嵌装饰或镶嵌图.在右图中说明了怎样利用正八边形和正方形铺满平面.数学上已经证明,在半正则镶嵌图中,没有一种正多边形的边数能超过12.此外,半正则镶嵌图的正多边形边数不可能是5、7、9、10、11.在周期镶嵌图中,当视线竖直或水平移动时,图案不断地重复它自己.

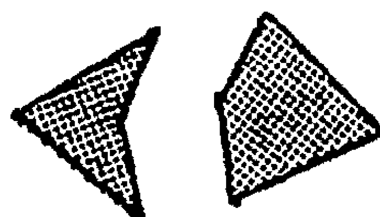


数学家曾经相信,如果能用某些图形设计成一幅非周期镶嵌图,那么也能用那些图形设计成周期镶嵌图.



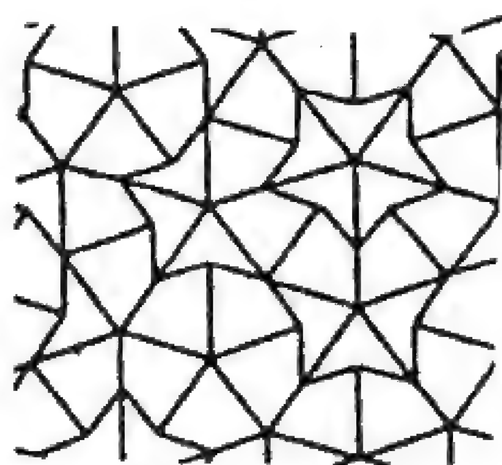
利用正方形瓷砖逐行错位得到的一种非周期镶嵌图

1964年,发现了一组20 000个不同的镶嵌瓷砖,它们只容许非周期镶嵌图.由此连带地发现了另外若干组,它们包含的不同图形较少,却也只产生非周期镶嵌图.然后,1974年,R.彭罗斯(R. Penrose)发现了一组,只要两种瓷砖,就能产生非周期镶嵌图,现在称之为彭罗斯镶嵌图.彭罗斯镶嵌图具有一种对称性,叫做五重(旋转)对称性(并且也有十重对称性).五重对称性意味着在平面内将镶嵌图旋转$\frac{1}{5}$周以后,能与原图形重合,或平移后重合.这样的对称性,在海胆或海星的图案中也可以看到.



两种彭罗斯瓷砖

在3维空间里,镶嵌图案是用立体砖块砌成的.晶体是3维镶嵌图案的美丽例子.晶体的精确结构,使它们自己能利用数学描述和分类.多面体、正多边形、对称性、镶嵌图案、投影,是用来描述晶体性质的几个数学概念.晶体分析开始于17世纪J.开普勒和R.虎克的工作.在



20 世纪之初,X 射线检晶仪用衍射图[1]识别和描述晶体.因为那时知道的所有晶体都是周期的,所以晶体的周期性被列入它们的定义,作为组成部分.虽然晶体的周期性没有被证明,它却成了约定内容.这意味着一个晶体的组成,必须是周期排列的相同砖块(称为晶胞).所有晶胞的形状必须是相同的多面体单元.大致来说,每个晶体被看成一个 3 维周期镶嵌图,然后,周期镶嵌图又意味着晶体不能具有五重对称性.



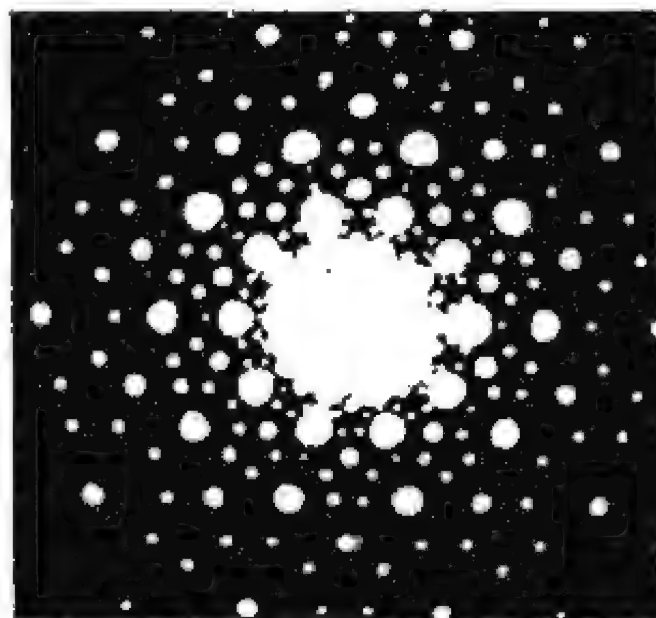
直到 20 世纪 80 年代,才发现了彭罗斯镶嵌图与晶体之间的联系.它们发生联系,并非因为它们通过某种共性互相联系,恰好相反,是由

[1] 当 X 射线或电子投射到固体上,撞击到固体中的原子,发生散射时,产生图案.这样的图形可以说明固体的原子结构,它的照片由 X 光胶片黑色背景上的白色斑点组成.如果斑点模糊,不是分散的,那么这个透明固体就是玻璃,而不是晶体.固体物质或者是无定形的(没有确定形状),或者是结晶的.在一个无定形固体中,原子随机排列,没有图案.晶体的原子,按照它们各自固有的秩序、周期安排.

于有一件事被认为它们是不同的——这就是五重对称性. 直到那时,仍然认为晶体都是周期的,因而不可能有五重对称性.

1982 年,化学家 D. 谢克特曼发现一种方法,可以用锰和铝制成一种新的超强合金. 用 X 射线衍射图检查这种晶体,他没有找到三重、四重或六重对称性,这些本来认为是应该具有的性质. 相反地,他发现了五重对称性[2]. 怎么会这样呢? 它分明与当时已知的晶体数学性质相抵触. 但是,经过两年半的实验,试图揭示他工作中的错误,然后转为试图让同行科学家们信服他的结果是正确的,谢克特曼发表了他的结果.

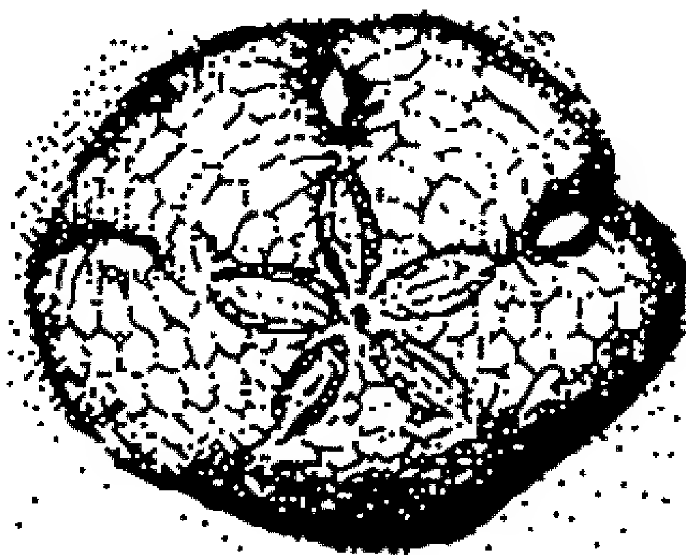
在此期间,1984 年,物理学家 P. 斯坦哈特(P. Steinhardt)和研究生 D. 莱文(D. Levine)利用计算机模拟,产生一个虚拟的 3 维彭罗斯镶嵌图,作为真实原子的晶胞. 他们计算他们想象中的固体的 X 光衍射. 因为这个固体的原子结构形成非周期镶嵌图,所以他们没有指望看见清楚的明亮斑点,只打算见到一个模糊的衍射图案. 哪知恰好相反,斑点是分离的,清楚的(像晶体那样),但是出现一个五重对称图案. 斯坦哈特把这种固体叫做准晶体. 结果发现,这个计算机模拟的衍射斑点图案,居然类似于锰铝合金的衍射图——两者都显示出五重对称性!


锰铝合金准晶体的 X 光衍射图中显示的五重对称性

这些发现震撼了晶体学专家们,但是它没有推翻晶体结构的数学理论. 相反地,晶体学专家重新定义晶体[3],把这些新的晶体也包括在

[2] 检晶仪约束,又名巴罗定律,是一个数学定理,说的是平面或空间周期镶嵌图中不可能有五重对称性. 显然,在自己工作中应用这个定理的科学家们还没有想到,晶体可能具有非周期镶嵌图.

[3] 在准晶体出现以前,只知道固体的两种结构形式: 结晶的(晶体)和无定形的(例如玻璃、面粉). 晶体由重复的(即周期的)单元组成,而无定形固体没有周期结构. 现在把晶体定义成具有清晰明亮不连续衍射图的固体. 玻璃[虽然透明,但不同于水晶,它]的 X 光衍射图总是斑点模糊. 这就是为什么晶体的这个新定义也包括准晶体的原因.


海胆的五重对称图案

内,并将它们叫做准晶体.自从谢克特曼的合金被发现之后,准晶体一个接着一个露面,直到现在,这样的合金已经超过一百种,其中有些甚至具有7重或9重对称性.

数学有很多诸如此类的相关事件,包括发现一种观念,证明或推翻一个定理,解决一个问题,并不意味着"万事大吉"[4].其实,经常是在旧观念的灯光照耀下,打开了新发现的门户.

[4] 在这些许多相关事件中,我们可以看到——试证欧几里得平行公理导致非欧几何,欧拉解答哥尼斯堡七桥问题引来拓扑学中网络的应用,19世纪数学家手中的数学怪物是分形的萌芽,费马大定理诱发出许多新的数学观念和它们的内在联系.如此等等.

听，隔壁有世界的地狱；

我们走！

——E. E. 肯明斯[E. E. Cummings，美国诗人，1894—1962 年]

智能机

智能机从外表上看起来，与你手头的日常工具差不多，但是往里面看，我们就能发现，数学中的模糊逻辑在那里工作. 这些机器并非只有简单的开关技术，机内还有专用程序和特别设计的传感器，用来分析执行任务的最佳途径. 以前，打开机器，只能简单地执行一项任务，例如洗衣、漂洗若干分钟. 如今，模糊逻辑改变了这些机器的工作状况. 考虑一件简单平凡的事情，例如真空吸尘器. 一台非智能的真空吸尘器，除了 ON/OFF 开关之外，还配有一本说明如何清洁地毯的用户手册. 智能真空吸尘器就不同了，它能针对地毯情况自行设置. 利用红外线传感器，它探测到地毯上的污垢和灰尘的数量，由此调整它的吸力，选择打扫地毯所用的刷子.

模糊逻辑起源于 1920 年逻辑学家 J. 拉卡西维茨的工作，他把传统的"是、非"逻辑修改为"多价"(多值)逻辑. "是、非"逻辑利用数 1 和 0(也可代表"真、假")，以及布尔代数，来编写程序，执行任务. 多值逻辑通过利用 0、1 和它们之间的任意数值，可以考虑灰色区域. 1965 年，数学家 L. 扎德将多值逻辑应用到集合论，发展了模糊集论，这是一种工具，可以用来发展模糊思考的背景数学. 与传统逻辑不同，在模糊逻辑及其多值系统里，提供了"打圆场"的机会——考虑多种可能性的机会. 对于智能机的情形，不是简单地赋予值"是、非"，而是改成"如果、那么". 数据通过智能机的各种传感器输入到它里面. 然后信息送达它的控制系统，在那里，数据被转换成可能数值的范围. 这个过程叫做模糊化. 智能机备有一组程序规则，用来分析这些模糊化的数值. 然后系统

选择一种执行方式，并且产生一组输出数值. 为了能用电子方式执行，输出数值取消模糊，转换成“是、非”控制命令.

智能机可以帮助我们在执行任务过程中，适时推断情况变化，调整工作安排. 例如，智能微波炉有一些传感器，可以自动将食物烹调到指定温度，但是非智能的微波炉只会根据你设定的时间和温度，照办不误[时间一到，立刻停止，不管炉中食品是否已被加热到指定的温度]. 智能洗衣机在你输入水位高低、衣物多寡、衣料种类、脏的程度以后，它会确定最佳洗涤循环. 一个洗涤循环之后，如果机器觉得清洗的水不够干净，它会重复一个循环. 松下公司和日立公司已经发展了单键智能洗衣机. 你可以使用智能烘衣机，借助传感器将潮湿衣服自动烘干，不需要设定烘干的时间和温度.

哪里有这些智能机? 在你周围各处. ——例如当你走进电梯，使用傻瓜照相机，用带有传感器的微波炉烹调食品，驾驶你那备有应急气囊和其他系统的汽车，乘喷气式飞机旅行，以至于请教一个智能财务顾问，等等.

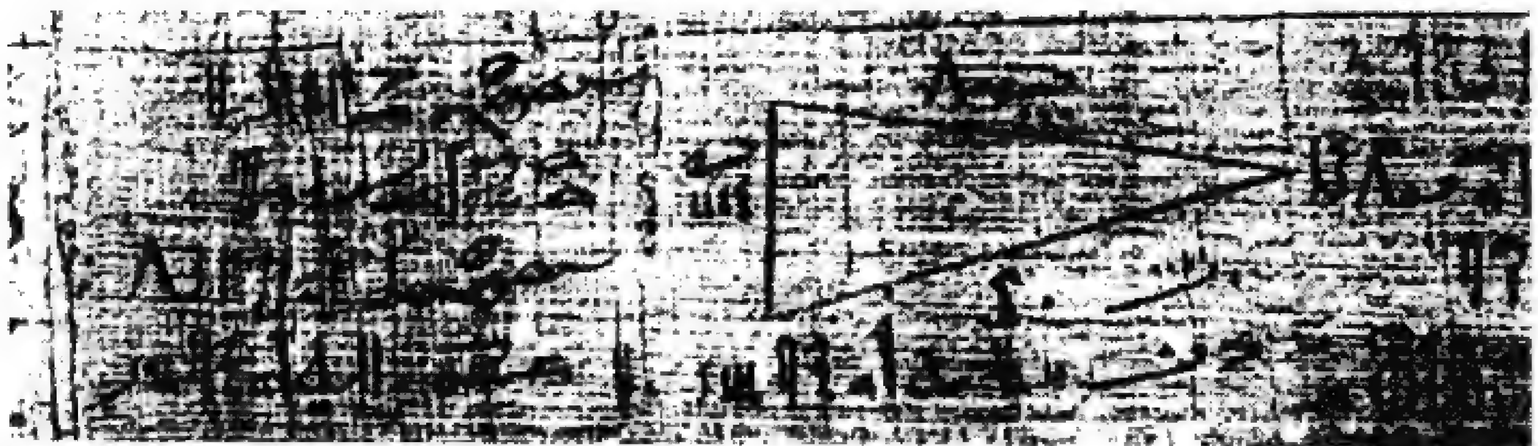


下面列举一些可以找到智能机的地方：

- 手提电脑的笔迹辨识系统.
- 手提摄像机中的背光控制.
- 能感觉并适应乘坐和动力效率的地铁系统.
- 语音识别对于发展声控计算机的应用.
- 地震预测装置.
- 汽车漫游控制，防锁刹车系统，电脑控制发动机功率.
- 空调系统.
- 机器人技术和机器人设计.
- 财政评估.
- 装备了安全系统的汽车，能识别躺在车轮旁边检修汽车底部的

驾驶员.

• 导弹.



古代埃及兰德纸草卷一个小片断中的数学问题

附 录 A

怎样在线段上作黄金分割点

线段 AC 的黄金分割点 B 将这线段分成下面的比例：

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}.$$



设 $AC=1, AB=x$，那么 $BC=1-x$. 将这些值代入上面的比例式，得

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}.$$

化为二次方程后，利用求根公式解出 x，得到 x 的值是 $\frac{1+\sqrt{5}}{-2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{-2}$.

因为 x 是线段 AB 的长度，应该取正的值 $\frac{1-\sqrt{5}}{-2}$. 代入前面的比例式，得到黄金比是

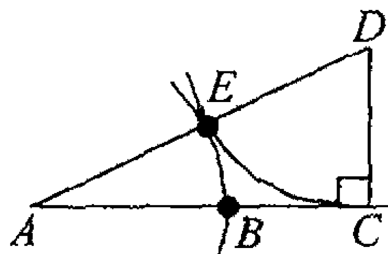
$$\frac{AC}{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\,033\,9\cdots,$$

将它记为 φ.

有多种不同作图方法可以得到 φ，下面是其中的一种方法：

(1)作线段 AC.

(2)作 CD 垂直于 AC，并且长度等于它的一半.



(3)作 AD.

(4)以 D 为圆心、DC 为半径画圆弧，交 AD 于 E.

(5)以 A 为圆心、AE 为半径画圆弧,交 AC 于 B.

(6)B 的位置将 AC 分成黄金比.因为如果设 $AC=2x$,那么 CD 和 DE 都等于 x,利用勾股定理得 $AD=x\sqrt{5}$,因而

$$\varphi=\frac{AC}{AB}=\frac{2x}{x(\sqrt{5}-1)}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=1.6180339\cdots.$$

另一种方法如下:

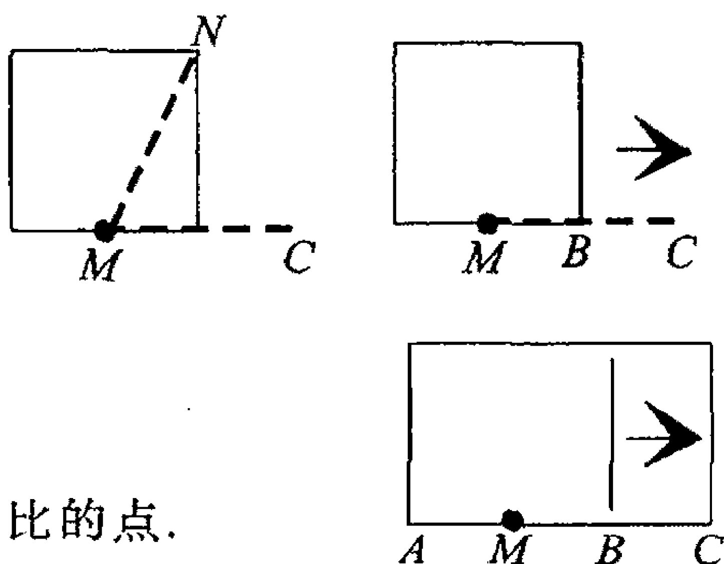
(1)作一个正方形.

(2)取其一边的中点 M.

(3)量出 M 到对边顶点 N 的距离,并且将包含点 M 的边延长,在它上面取 MC,使其长度等于量得的距离.

(4)如图完成长方形.

(5)点 B 就是将线段 AC 分成黄金比的点.



附　录　B

英文计量单位采用的前缀		
前缀	符号	值
yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}
zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}
exa	E	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
giga	G	1 000 000 000 = 10^{9}
mega	M	1 000 000 = 10^{6}
kilo(千)	k	1 000 = 10^{3}
hecto	h	100 = 10^{2}
deka	da	10 = 10^{1}
	1 = 10^{0}[计量单位:gram(克),或 meter(米),或 liter(公升)]	
deci(分)	d	0. 1 = 10^{-1}
centi(厘)	c	0. 01 = 10^{-2}
milli(毫)	m	0. 001 = 10^{-3}
micro(微)	μ	0. 000 001 = 10^{-6}
nano(纳)	n	0. 000 000 001 = 10^{-9}
pico(皮)	p	0. 000 000 000 001 = 10^{-12}
femto	f	0. 000 000 000 000 001 = 10^{-15}
atto	a	0. 000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}
zepto	z	0. 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}
yocto	y	0. 000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}

参 考 资 料

Ball, W. W. Rouse and Coxeter, H. S. M. , *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications, Inc. , New York, 1987.

Banchoff, Thomas F. , *Beyond The Third Dimension*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1990.

Barnsley, Micahel, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc. , Boston, 1988.

Bell, Eric Temple, *The Magic Of Numbers*, Dover Publications, Inc. , New York, 1946.

Blackwell, William, *Geometry & Architecture*, Key Curriculum Press, Berkeley, CA, 1994.

Boles, Martha and Newman, Rochelle, *Universal Patterns*, Pythagorean Press, Bradford, MA 1987.

Bayer, Carl, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, New Jersey, 1985.

Briggs, John and Peat, David, *Turbulent Mirror*, Harper & Row, New York. 1989.

Campbell,D. M. and Higgins, J. editors, *Mathematics: People, Problems, Results*, Wadsworth International, Belmont, CA 1984.

Casto, John L. , *Complexification*, Harper Collins, New York, 1994.

Chadwick, John, *Reading the Past—Linear B*, Univ. of California Press, Berkeley, 1987.

Cipra, Barry, *What's Happening in Mathematical Sciences 1995—1996*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

Cipra, Barry, *What's Happening in Mathematical Sciences 1994*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

Cipra, Barry, *What's Happening in Mathematical Sciences 1993*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

Cipra, Barry, *What's Happening in Mathematical Sciences 1998—1999*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

Clark, Don, *Myers Laboratories: Hearing in Three Dimensions*, San Francisco Chronicle, San Francisco, June 11, 1987.

Cook, Theodore A., *The Curves of Life*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.

Coveney, Peter & Highfield, Roger, *The Arrow of Time*, Fawcett Columbine, New York, 1990.

Dantzig, Tobias, *Number*, MacMillan Co., New York, 1930.

Davies, Paul, *About Time*, Simon & Schuster, New York, 1995.

Davies, Paul, *The Mind of God*, Simon & Schuster, New York, 1992.

Davies, W. V., *Reading the Past — Egyptian Hieroglyphs*, University of California Press, Berkeley, CA, 1987.

Devlin, Keith, *Mathematics The Science of Patterns*, Scientific American Library, New York, 1994.

Dewdney, A. K., *The Magic Machine*, W. H. Freeman & Co., New York, 1990.

Dewdney, A. K., *The Armchair Universe*, W. H. Freeman & Co., New York, 1988.

Dilke, O. A. W., *Reading the Past—Mathematics & Measurement*, University of California Press, Berkeley, CA, 1987.

Dunham, William, *Journey Through Genius*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

Eames, charles & Ray, *A Computer Perspective*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1990.

Feynman, Richard P. , *QED*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1985.

Gardner, Martin, *Fractal Music*, *Hypercards and more*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1991.

Gardunkel, Solomon & Steen, Lynn A. editors, *For All Practical Purposes*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1991.

Gleick, James, *Chaos*, Penquin Group, New York, 1987.

Golos, Ellery B. , *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Holt, Rinehart & Winston, Inc. , New York, 1968.

Goudsmit, Samuel & Clairborne, Robert, *Time*, Time Inc. , New York, 1966.

Greensberg, Marvin Jay, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1980.

Grübaum, Branko and Shephard, G. C. , *Tillings and Patterns*, W. H. Freeman and Co. , New York, 1987.

Gullberg, Jan, *Mathematics from the Birth of Numbers*, W. W. NORTON & Co. , New York, 1997.

Hall, Stephen S, *A Molecular Code Links Emotions*, Smithsonian Magazine, Smithsonian Asso. , Washington D. C. , 1990.

Hambridge, Jay, *The Elements of Dynamic Symmetry*, Dover Publications, Inc. , New York, 1967.

Hawkins, Gerald s. , *Mindsteps to the Cosmos*, Harper & Row, Publishers, NY, 1983.

Hoffman, Paul, *Archimedes' Revenge*, W. W. Noron & Co. ,

Inc. , New York, 1988.

Ifrah, Georges, *From One to Zero*, Penquin Books, New York, 1985.

Ivins, Jr. , William M. , *Art & Geometry*, Dover Publications, Inc. , New York, 1946.

Kaku, Michio, *Hyperspace*, Oxford University Press, New York, 1994.

Kosko, Bart, *Fuzzy Thinking*, Hyperion, New York, 1993.

Kosko, Bart, *Fuzzy Future*, Harmony Books, New York, 1999.

Krauss,Lawrence M. , *The Physics of Star Trek*, Basic Books/ Harper Collins, New York, 1995.

Lebow, Irwin, *The Digital Connection*, Computer Science Press, New York. 1991.

Lewin, Roger, *Complexity*, Macmillan Publishing Co. , New York, 1992.

Lloyd,Steon; Rice,David;et al. , *World Architecture*, McGraw-Hill Co. , London, 1978.

Luckiesh, M. , *Visual Illusions*, Dover Publications, Inc. , New York, 1965.

Macrone, Michael, *Eureka!*, Harper Collins, New York, 1994.

Macvey, John W, *Time Travel*, Scarborough House/Publishers, Chelsea, MI, 1990.

Mandelbrot, Benoit, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1983.

Menninger, Karl, *Number Words 7 Number Symbols*, Dover Publications, New York, 1969.

Newman, James R. , et. al. , *The World of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1956.

Nicolis, Grégoire and Prigogine, Ilya, *Exploring Complexity*,

W. H. Freeman and Co. , New York. 1989.

Pagels, Heinz R. , *Perfect Symmetry*, Simon & Schuster, New York, 1985.

Palfrreman, Jon and Swade, Doron, *The Dream Machine*, BBC Books, London, 1991.

Pappas, Theoni, *More Joy of Mathematics*, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1991.

Pappas, Theoni, *The Joy of Mathematics*, Wide World Publishing/ Tetra, San Carlos, CA, 1989.

Pappas, Theoni, *What Do You See? — An optical illusion slide show*, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 1989.

Paulos, John Allen, *Beyond Numeracy*, Alfred A. Knopf, New York, 1991.

Peacock, Roy E. , *A Brief History of Eternity*, Crossway Books, Wheaton, IL, 1990.

Peat, E. David, *Superstrings & the Search for TOE*, Contemporary Books, Chicago, 1988.

Pedoe, Dan, *Geometry and the Visual Arts*, Dover Publications, Inc. , New York, 1976.

Peitgen, H. , Jürgens, H. , & Saupe, Dietmar, *Chaos & Fractals*, Springer—Verlag, New York, 1992.

Peterson, Ivars, *The Jungle of Randomness*, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 1990.

Peterson, Ivars, *Fatal Defect*, Random House, New York, 1995.

Pickover, Clifford, *Computers and the Imagination*, St. Martin's Press, New York, 1991.

Pickover, Clifford, *Mazes of the Mind*, St. Martin's Press, New York, 1992.

Pierce, John R. , *The Science of Musical Sound*, W. H. Freeman & Co. , New York, 1983.

Prigogine, Ilya, *Order Out Of Chaos*, Bantam Books, Toronto, 1988.

Ransom, William R. , 3 *Famous Geometries*, William Ronsom, 1959.

Regis, Ed, *Nano*, Little Brown & Co. , Boston, 1995.

Rheingold, Howard, *Virtual Reality*, Summit Books, New York, 1991.

Rhoribuchi, Seiji, editor, *Stereogram*, Masahiro Oga, Japan, 1994.

Richter, Jean Paul, *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, Dover Publications, New York, 1970.

Robbin, Tony, *FOURFIELD: Computers, Art and the 4th Dimension*, Little Brown & Co. , Boston, 1992.

Robins, Gay and Shute, Charles, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Dover Publications, Inc. , New York, 1987.

Ronan, Colin A. , *Science*, Facts on File Publications, New York, 1983.

Rucker, Rudy, *The Fourth Dimension*, Houghton Mifflin Co. , Boston, 1984.

Ruelle, David, *Chance and Chaos*, Princeton Uninersity Press, New Jersey, 1991.

Schroeder, Manfred, *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman and Co. , New York, 1990.

Shlain, Leonard, *Art & Physics*, William Morrow and Co. , New York, 1991.

Singh, Simon, *Fermat's Enigma*, Walter & Co. , New York, 1997.

Smith, D. E. , *History of Mathematics*, Dover Publications, Inc. , New York, 1951.

Smoot, George & Davidson, Keay, *Wrinkles in Time*, William Morrow & Co. inc. , New York, 1993.

Sobel, Dava, *Longitude*, Pengiun Books, New York, 1995.

Stevens, Peter S. , *Patterns In Nature*, Little Brown & Co. , Boston, 1974.

Stewart, Ian and Golubitsky, Martin, *Fearful Symmetry-Is God a Geometer?* Blackwell Publishers, Oxford, 1992.

Stewart, Ian, *Does God Play Dice?* Basil Biackwell, Oxford, 1989.

Struik Dirk, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications Inc. , New York, 1967.

Stwertka, Albert, *Recent Revolutions in Mathematics*, Franklin Watts, New York, 1987.

Waerden, B. L. van der, *Science Awakening*, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 1963.

Waldrop, M. Mitchell, *Complexity*, Simon & Schuster, New York, 1992.

Walker, C. B. F, *Reading the Past-Cuneiform*, Univ. of California Press, Berkeley, 1987.

Wells, David, *Curious & Interesting Numbers*, Penguin Books, London, 1986.

Wolf, Fred Alan, *Parallel Universes*, Simon & Schuster, New York, 1988.

参考文章来源于下列期刊:

Science News, *Look Japan*, *Scientific American*, *Discover*, *Science*, *and Notices of American Mathematical Society*.

索 引

名词按汉语拼音顺序排列．数字表示页号．

【A】

ABC 计算机 ABC computer 31

阿查里雅 Acharya，Raj 34

阿德莱曼 Adleman，Leonard M. 121—123

阿坦索夫 Atansoff，Jorn V. 31

埃柯 Eco，Umberto 132

奥特瑞 Oughtred，William 30

【B】

巴比奇 Babbage，Charles 31

半正则镶嵌 semiregular tiling 180

贝里 Berry，Clifford 31

毕达哥拉斯定理 Pythagorean theorem 44—47

毕加索 Picasso 23—26

波利亚 Bolyai，Johann 144，145

博尔赫斯 Borges，Jorge Luis 132

布拉德伯里 Bradbury，Ray 134

【C】

超立方体 hypercube 151

超弦 superstring 167

楚泽 Zuse，Konrad 109

川口卫 Kawaguchi，Mamoru 74

【D】
达利 Dali，Salvador 10
德方斯大拱门 le Grande Arche 27—29
德福雷斯特 De ’forest，Lee 31
德弗里斯 Vries，Hendrik de 64
德雷克斯勒 Drexler，Eric 171
等角螺线 equiangular spiral 6
地球信托基金 earthtrust 49
电影剧本 movie screenplays 134
电子货币 electronic money 13—16
杜尚 Duchamp，Marcel 23，26
对策论 game theory 159—161
多布琪丝 Daubechies，Ingrid 87
多布琪丝小波 Daubechie wavelets 87—88
多值逻辑 multivalued ligic 77
【E】
厄尔曼 Ullman，Stanislaw 109
【F】
斐波那契数列 Febonacci sequence 7
费马 Fermat,Pierre de 155
费马大定理 Fermat’s last theorem 155—158
非线性数学 non—linear mathematics 67
非周期镶嵌图 nonperiodic tiling 180
分形 fractal 177
分子计算机 molecular computer 121—123
傅立叶 Fourier，Jean—Baptiste 86
复杂性 complexity 135—138，177
【G】
GPS 127—130

盖里 Gehry, Frank 40—43
甘利俊一 Amari, Shun'ichi 35
甘特 Gunter, Edmund 30
高斯 Gauss, Karl 19
高维空间 hyperspace 19—22
公钥 public—key 15
勾股定理 Pythagorean theorem 44—47
古根海姆美术馆毕尔巴鄂分馆 Guggenheim Bilbao 40—43
孤立子 solitons 64—67
谷山丰 Taniyama, Yutaka 157
骨质疏松症与分形 osteoporosis & fractals 33—34
【H】
哈里森 Harrison, John 93—94
哈密尔顿 Hamilton, Sir William Rowan 121
哈密尔顿道路 Hamiltonian path 121
海豚计划 Project Delphis 49, 50
汉简 Han sticks 3
赫尔 Hull, Thomas 98
化学波 chemical waves 113
黄金比 golden ratio 5—8
黄金长方形 golden rectangle 5
黄金三角形 golden triangle 6
惠斯登 Wheaststone, Sir Charles 10
混沌理论 chaos theory 176
【J】
计量单位 units for weights and measures 117—120
计算机 computer 30—32
矶崎新 Isozaki, Arata 72—76
伽利略 Galileo 92

校验数字 check digit 147—150
金字塔 pyramids 104—106
经度 longitude 90—95
【K】
卡夏 Catia 41
康威 Conway, John Horton 108
考尔德 Calder, Alexander 81—85
克拉克 Clark, Maureen 10
克鲁斯卡尔 Kruskal, Martin 64
科特斯 Coates, Robert 131
柯特维希 Kortweg, Diederik Johannes 64
【L】
拉卡西维茨 Lakasiewicz 77
拉斯考克斯岩洞 Lascaux cave 9
莱布尼兹 Leibniz, Gottfried 31
莱文 Levine, Don 182
莱特曼 Lightman, Alan 132
黎曼 Riemann, Georg 19,144—146
立体镜 stereoscope 10
立体画 stereograph 10
立体主义 cubism 23—26
量子 quantum 39
量子计算机 quantum computer 37—39
罗巴切夫斯基 Lobachevsky, Nicholai 144, 145
罗宾 Robbin, Tony 151—154
罗默 Römer, Ole 95
罗素 Russell, John Scott 64
螺旋扫描机 spiral scan machines 33
【M】

盲签名 Blind signatures 15
梅特鲁道勒斯 Metrodorus 60
迷宫 mazes 113－116
密钥证书 Key-escrow 15
莫奈 Monet，Claude 52－54
模糊集合 fuzzy sets 77，184
模糊逻辑 fuzzy logic 77，176,184
模糊数 fuzzy numbers 77－80
【N】
纳米技术 nanotechnology 34，170－175
纳皮尔算筹 Napier's bones 30
纽结 knots 55－58
诺依曼 Neumann，John von 109
【O】
欧几里得第五公设 Euclid's 5th postolate 19
【P】
彭罗斯 Penrose，Roger 180
彭罗斯瓷砖 Penrose tiles 180
皮勒塔岩洞的记号 Pileta cave marks 1
普恩加莱 Poincaré，Henri 23
普林塞 Princet，Maurice 23
【Q】
丘姆 Chaum,David 12
囚犯难题 prisoners' dilemma problem 160
曲率 curvatures 144－146
【R】
人体 body，the 33－36
软计算 Soft computing 176－178
【S】

萨特 Satre, Jean Paul 82
塞尚 Cezanne, Paul 124—126
三维画 stereograms 10
三维周期镶嵌图 3-D periodic tiling 181
山川烈 Yamakawa,Takeshi 178
生命游戏 game of life 108
视幻 optical illusions 9—12
时间 time 139—142
数学的潘多拉盒子 mathematics pandora's box 30—32
数字签名 Digital signature 15
私钥 private key 15
斯普雷克森 Spreckelsen, Johan Otto von 28
斯坦哈特 Steinhardt, Paul 182
斯托帕德 Stoppard, Tom 133
孙子算经 Sun Tsu Suan-ching 60
【T】
泰勒 Tyler, Christopher 10
特雷默 Trémaux, M. 115
天气预报 weather forecasting 68—71
【W】
韦伯 Webber, William T. 98
威尔斯 Wiles, Andrew 157—158
韦纳 Werner, Johannes 92
卫星定位系统 global positioning system 127—130
文学 literature 131—134
沃尔弗拉姆 Wolfram, Stephan 109
五边形 pentagon 6
五重对称性 Fivefold symmetry 180—182
五角星 pentagram 6

【X】

细胞自动机 cellular automata 106—110
现金卡 cash card 16
弦论 String theory 22，167
镶嵌图 tiling 179
小波 wavelets 86—88
肖尔 Shor，Peter W. 39
谢克特曼 Shechtmann，Daniel 182
信息几何 informational geometry 35
虚拟银行 virtual banks 14—15

【Y】

雅克尔 Jacquard，Joseph-Marie 31
遗传基因算法 genetic algorithm 178
艺术宣言 art manifesto 111—112
印度岩洞碑文 Hindu cave inscriptions 2,3
宇宙 universe 143—146

【Z】

扎布斯基 Zabusky，Norman 65
扎德 Zadeh，Lotfi A. 77，184
早期数学制品 artifacts early mathematics 1—4
折纸 paperfolding 96—99
志村五郎 Shimura,Goro 157
致密子 compactons 66
智能机 smart machines 184—186
中国剩余定理 Chinese Remainder theorem 59—63
蛀孔 wormholes 21，141
准晶体 quasicrystals 151，152，179—183
自然形态 natural formations 100—103
佐尔内 Zollner，Johann 9